

A Feynman-előadások fizikából

A Feynman-előadások fizikából

Richard P. Feynman
Robert B. Leighton
Matthew Sands



III. kötet


TYPOTEX

A könyv megjelenését támogatta:
a Magyar Tudományos Akadémia és
a Nemzeti Kulturális Alap a kiadói program keretében.



A frissített magyar kiadás alapjául szolgált:
The Feynman Lectures on Physics
Copyright © 1965, 2006, 2010 by California Institute of Technology,
Michael A. Gottlieb, and Rudolf Pfeiffer

This edition published by arrangement with Basic Books,
an imprint of Perseus Books, LLC,
a subsidiary of Hachette Book Group Inc., New York, New York, USA.
All rights reserved.

Hungarian translation © Benkő Lázár, Nagy Elemér,
Dr. Somogyi Antal, Telbisz Ferenc, Vesztergombi György,
Typotex, Budapest, 2020
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Szakmailag lektorálta: Patkós András

ISBN 978 963 493 081 5

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról
a www.typotex.hu és a facebook.com/typotexkiado
oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Gerner József
Borítóterv: Somogyi Péter
Nyomda: Séd Kft.
Felelős vezető: Dránovits Anna

Tartalom

53. Elektromágnesesség	11
53.1. Elektromos erők	11
53.2. Elektromos és mágneses terek	15
53.3. Vektorterek jellemzői	16
53.4. Az elektromágnesesség törvényei	19
53.5. Mi is a „tér”?	25
53.6. Elektromágnesesség a tudományban és a technikában	27
54. Vektorterek differenciálszámítása	29
54.1. Megérteni a fizikát...	29
54.2. Skalár- és vektorterek – T és \mathbf{h}	30
54.3. Terek deriváltjai – a gradiens	34
54.4. A ∇ operátor	38
54.5. Műveletek ∇ -val	39
54.6. A hővezetés differenciálegyenlete	41
54.7. Vektorterek második deriváltjai	42
54.8. Buktatók	45
55. Vektor-integrálszámítás	48
55.1. Vektorintegrálok; $\nabla\psi$ vonalintegrálja	48
55.2. A vektortér fluxusa	51
55.3. Kockából kilépő fluxus; Gauss tétele	54
55.4. Hővezetés; a diffúziós egyenlet	56
55.5. Vektortér cirkulációja	59
55.6. Négyzet menti cirkuláció; Stokes tétele	61
55.7. Rotációmentes és divergenciamentes terek	64
55.8. Összefoglalás	66
56. Elektrosztatika	68
56.1. Sztatika	68
56.2. A Coulomb-törvény; a szuperpozíció elve	70
56.3. Elektromos potenciál	73
56.4. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$	77
56.5. \mathbf{E} fluxusa	78
56.6. Gauss-tétel; \mathbf{E} divergenciája	83

56.7.	Gömbtöltés erőtere	85
56.8.	Erővonalak; ekvipotenciális felületek	86
57.	A Gauss-tétel alkalmazása	90
57.1.	Az elektrosztatika nem más, mint a Gauss-tétel plusz...	90
57.2.	Egyensúly a sztatikus elektromos térben	90
57.3.	Egyensúlyi helyzet vezetőekkel	92
57.4.	Az atomok stabilitása	93
57.5.	Vonal menti töltéseloszlás elektromos erőtere	94
57.6.	Töltött sík; két sík	95
57.7.	Töltött gömb; gömbhéj	98
57.8.	Pontos-e a Coulomb-törvény?	99
57.9.	Vezetők erőtere	104
57.10.	A vezető üregében levő erőter	106
58.	Az elektromos tér tulajdonságai különböző fizikai körülmények között	108
58.1.	Az elektrosztatikus potenciál egyenletei	108
58.2.	Az elektromos dipólus	109
58.3.	Megjegyzések a vektoregyenletekhez	114
58.4.	A dipólus potenciálja mint gradiens	115
58.5.	Dipólus-közelítés tetszés szerinti töltéseloszlás esetén	118
58.6.	Töltött vezetők tere	120
58.7.	A tükrözési módszer	121
58.8.	Ponttöltés vezető síkfelület közelében	122
58.9.	Ponttöltés vezető gömb közelében	124
58.10.	Kondenzátorok; párhuzamos lemezek	126
58.11.	Nagyfeszültségű átütések	129
58.12.	A téremissziós mikroszkóp	131
59.	Az elektromos tér tulajdonságai... (folytatás)	134
59.1.	Az elektrosztatikus tér meghatározásának módszerei	134
59.2.	Kétdimenziós terek; komplex változós függvények	136
59.3.	Plazmarezgések	141
59.4.	Kolloidrészecskék elektrolitban	144
59.5.	A rács elektrosztatikus tere	148
60.	Elektrosztatikus energia	151
60.1.	Töltések elektrosztatikus energiája. A homogén gömb	151

60.2.	A kondenzátor energiája. Elektromosan töltött vezetőkre ható erők	153
60.3.	Ionkristály elektrosztatikus energiája	157
60.4.	Elektrosztatikus energia az atommagokban	160
60.5.	Az elektrosztatikus tér energiája	166
60.6.	Pontszerű töltés energiája	170
61.	Légköri elektromosság	172
61.1.	A légkör elektromos potenciálgradiense	172
61.2.	Elektromos áramok a légkörben	174
61.3.	A légköri áramok eredete	177
61.4.	Zivatarok	179
61.5.	A töltések szétválásának mechanizmusa	185
61.6.	A villám	190
62.	Dielektrikumok	195
62.1.	A permittivitás	195
62.2.	A P polarizációvektor	197
62.3.	Polarizációs töltések	199
62.4.	Az elektrosztatika egyenletei és a dielektrikumok	203
62.5.	Elektromos terek és erők a dielektrikum jelenlétében	205
63.	A szigetelő anyag belső szerkezete	210
63.1.	Molekuláris dipólusok	210
63.2.	Elektronpolarizáció	210
63.3.	Poláros molekulák; irányítási polarizáció	214
63.4.	Elektromos tér a dielektrikum üregeiben	218
63.5.	Folyadékok permittivitása; a Clausius–Mossotti-egyenlet	221
63.6.	Szilárd dielektrikumok	223
63.7.	Ferroelektromosság; BaTiO ₃	224
64.	Elektrosztatikai analógiák	231
64.1.	Azonos egyenletek – azonos megoldások	231
64.2.	Hőáramlás; pontszerű forrás végtelen sík határolófelület közelében	232
64.3.	A kifeszített membrán	238
64.4.	Neutrongdiffúzió; gömb alakú, homogén forrás homogén közegben	241
64.5.	Örvénymentes folyadékáramlás egy gömb környezetében	244

64.6.	Világítástechnika; sík egyenletes megvilágítása	248
64.7.	A természet „fundamentális egysége”	251
65.	Magnetosztatika	253
65.1.	A mágneses tér	253
65.2.	Az elektromos áram; a töltés megmaradása	254
65.3.	Az áramra ható mágneses erő	256
65.4.	Időben állandó áram mágneses tere; Ampère törvénye	257
65.5.	Egyenes vezető és tekercs mágneses tere; atomi áramok	260
65.6.	Mágneses és elektromos terek relativitása	264
65.7.	Áramsűrűség és töltéssűrűség transzformációja	271
65.8.	Szuperpozíció; a jobbkéz-szabály	272
66.	A mágneses tér különböző fizikai körülmények között	274
66.1.	A vektorpotenciál	274
66.2.	A vektorpotenciál kiszámítása az áramerősségből	278
66.3.	Egyenes vezető	280
66.4.	Hosszú szolenoid	281
66.5.	Kis áramhurok tere; a mágneses dipólus	284
66.6.	Áramkör terének vektorpotenciálja	287
66.7.	A Biot–Savart-törvény	289
67.	Vektorpotenciál	291
67.1.	Az áramvezető hurokra ható erők; a dipólus energiája	291
67.2.	Mechanikai és elektromos energia	295
67.3.	A stacionárius áramok energiája	299
67.4.	B vagy A?	300
67.5.	A vektorpotenciál és a kvantummechanika	303
67.6.	Ami a sztatikában igaz, helytelen a dinamikában	312
68.	Az indukált áram	316
68.1.	Motorok és generátorok	316
68.2.	Transzformátorok és tekercsek	322
68.3.	Az indukált áramokra ható erők	325
68.4.	Elektromos ipar	331
69.	Az indukció törvényei	336
69.1.	Az indukció fizikai alapjai	336
69.2.	Kivételek a fluxusszabály alól	339

69.3. Részecskegyorsítás az indukált elektromos térben; a betatron	341
69.4. Egy paradoxon	344
69.5. A váltakozó áramú generátor	345
69.6. A kölcsönös indukció	350
69.7. Az önindukció	353
69.8. Tekercs és mágneses energia	355
70. A Maxwell-egyenletek	361
70.1. Maxwell-egyenletek	361
70.2. Mit jelent az egyenlet új tagja?	364
70.3. A teljes klasszikus fizika	367
70.4. A haladó tér	368
70.5. A fény terjedési sebessége	374
70.6. A Maxwell-egyenletek megoldása; a potenciálok és a hullámeqyenlet	376
71. A legkisebb hatás elve	380
71.1. Egy speciális előadás – csaknem szóról szóra rögzítve	380
71.2. Néhány kiegészítő megjegyzés az előadáshoz	402
72. A Maxwell-egyenletek megoldása a szabad térben	403
72.1. Hullámok a szabad térben; síkhullámok	403
72.2. Háromdimenziós hullámok	414
72.3. Tudomány és képzelőerő	416
72.4. Gömbhullámok	420
73. A Maxwell-egyenletek megoldása töltésekkel és áramokkal	426
73.1. A fény és az elektromágneses hullámok	426
73.2. Pontszerű forrásból kiinduló gömbhullámok	429
73.3. A Maxwell-egyenletek általános megoldása	431
73.4. A rezgő dipólus tere	433
73.5. Mozgó töltés tere, Liénard–Wiechert-féle általános megoldás	440
73.6. A Lorentz-képlet	444
74. Váltakozó áramú körök	448
74.1. Az impedanciák	448
74.2. A generátorok	455

74.3. Ideális elemeket tartalmazó áramkörök; Kirchhoff-törvények	459
74.4. Ekvivalens áramkörök	466
74.5. Az energia	468
74.6. Létraáramkör	471
74.7. Szűrőkörök	474
74.8. Egyéb áramköri elemek	479
75. Üregrezonátorok	484
75.1. Valóságos áramköri elemek	484
75.2. Az ideális kondenzátor nagyfrekvenciás viselkedése	487
75.3. Az üregrezonátor	493
75.4. Rezgési móduszok	499
75.5. A rezgőkörtől az üregrezonátorig	503
76. Hullámvezetők	506
76.1. A távvezeték	506
76.2. A téglalap keresztmetszetű hullámvezető	511
76.3. Határfrekvencia	516
76.4. A hullámok sebessége a hullámvezetőben	518
76.5. A hullámvezető hullámainak megfigyelése	519
76.6. Hullámvezetők csatlakoztatása	520
76.7. Csőhullámmóduszok	524
76.8. A csőhullámok szemléletes képe	526
A könyvben alkalmazott jelölések	531
Név- és tárgymutató	533

Elektromágnesesség

53.1. Elektromos erők

Képzeljünk el egy olyan erőt, mint a gravitáció, amely – mint ismeretes – lényegében a távolság négyzetével fordítottan arányos, de ez az erő milliárd-milliárd-milliárd-milliárdszor erősebb, mint a gravitáció. Van még egy másik különbség is. Ellentétben a gravitációval, ahol csak vonzás létezik, tételezzük fel azt is, hogy kétféle „anyag” van: pozitív és negatív, és az egyneműek taszítják, a különböző neműek pedig vonzzák egymást.

A pozitív anyagok óriási erővel taszítanak egymást és szétszóródnának a szélrózsa minden irányába. A negatív anyagokkal ugyanez történne. De egészen más a helyzet, ha a pozitív és negatív anyagokat egyenlő arányban összekeverjük. Az óriási vonzóerő egymáshoz vonzaná az ellentétes részeket. Végeredményben ezek az iszonyú erők majdnem teljesen kiegyenlítődnének, sűrű, „finomszemcsés” pozitív-negatív keverék képződne, és e keverék két szétválasztott darabja között gyakorlatilag sem vonzó-, sem taszítóerő nem lépne fel.

Van ilyen erő: az elektromos erő. Ugyanis minden anyag a pozitív protonok és negatív elektronok keveréke, melyek ezzel az óriási erővel vonzzák és taszítják egymást. Azonban az egyensúly olyan tökéletes, hogy ha közel megyünk is valakihez, semmiféle erőhatást nem érzünk. Pedig már igen kis kiegyensúlyozatlanság is észrevehető lenne. Ha két ember kartávolságnyira állna egymástól és mindegyiküknek egy százalékkal több elektronja lenne, mint protonja, a taszító erő hihetetlenül nagy lenne. Milyen nagy? Az Empire State Building felemeléséhez lenne elég? Nem! A Mont Everest felemeléséhez lenne elég? Nem! Ez a taszító erő elég lenne az egész Földgolyó súlyával egyenlő nagyságú „súly” felemeléséhez!

Ha elgondoljuk, hogy ebben a finom keverékben a hatalmas erők tökéletesen kiegyensúlyozottak, nem nehéz megérteni, hogy az anyag, amely igyekszik fenntartani pozitív és negatív töltéseinek finom egyensúlyát, igen merev és szilárd lehet. Az Empire State Buildingnek például csak körülbelül 2 cm-nyi kilengése van, mert az elektromos erők az összes elektront és protont többé-kevésbé megtartják eredeti helyükön. Másrészt, ha a semleges anyagot olyan kis részekre osztjuk, hogy az egyes részecskék csak néhány atomot tartalmaznak, akkor általában nem mindegyik anyagrészben lesz egyenlő a pozitív és negatív töltések száma, ezért nagy elektro-

mos erők lépnek fel az egyes anyagdarabkák között. De akkor is kialakulhat nagy eredő elektromos erő, ha a két szomszédos darabkában egyenlő számban van a kétféle töltés, ugyanis az egyedi töltések közti erők a távolságnégyzetek reciprokával arányosak. Eredő erő ébredhet, ha az egyik darabnak a negatív töltése közelebb van a másik darab pozitív töltéséhez, mint a negatívjaihoz. A vonzóerők ekkor nagyobbak lehetnek, mint a taszítók, és a két kis darab között végeredményben töltéstöbblet nélkül is vonzás léphet föl. Az atomokat összetartó erők és a molekulákat összetartó kémiai erők valójában olyan tartományokban ható elektromos erők, amelyekben a töltésegyensúly nem tökéletes, vagy a távolságok igen kicsik.

Olvasóink már tudnak róla, hogy az atommagban pozitív protonok, a magon kívül pedig elektronok vannak. Joggal kérdezhetik: „Ha az elektromos erő olyan roppant nagy, miért nem zsúfolódnak egymásra a protonok és elektronok? Ha finom keveréket akarnak alkotni, miért nem tömörülnek még jobban?” A választ a kvantumeffektusok szolgáltatják. Ha megpróbáljuk az elektronokat a protonok körül nagyon kis tartományba bezárni, minél összébb szorítjuk őket, annál nagyobbra szabja meg a határozatlansági elv impulzusnégyzetük átlagát. Ez a mozgás – melyet a kvantummechanika törvényei határoznak meg – akadályozza meg, hogy az elektromos vonzóerők a töltéseket valamivel is közelebb vigyék egymáshoz.

Másik kérdés: „Mi tartja össze az atommagot?” Hiszen az atommagban több proton van, és mindegyik proton pozitív. Miért nem taszítják ezek széjjel egymást? Kiderült, hogy a magokban az elektromos erőn kívül más, úgynevezett magerők is hatnak, melyek nagyobbak az elektromos erőnél és képesek az elektromos taszítás ellenére összetartani a protonokat. A magerőknek azonban rövid a hatótávolságuk, az erőhatás $1/r^2$ -nél sokkal gyorsabban csökken, és ennek fontos következménye van. Ha túl sok a proton egy magban, a mag túl nagyvá válik és szétesik. Jó példa erre a 92 protonnal rendelkező uránium. A magerők döntően csak a szomszédos protonok (vagy neutronok) között hatnak, ellenben az elektromos erők nagy távolságokat hidalnak át, minden egyes proton taszítja az összes többi. Minél több proton van egy magban, annál erősebb az elektromos taszítás, egészen addig, amíg – mint az urániumban is – az egyensúly olyan labilissá nem válik, hogy a mag majdnem szétesik a taszító elektromos erők hatására. Ha egy ilyen magot egész könnyedén „meglöknünk” (például egy lassú neutronnal), két pozitív töltésű darabra esik, s ezeket szétrepíti az elektromos taszítás. Az így felszabaduló energia: az atombomba energiája. Ezt az energiát gyakran „nukleáris” energiának is nevezik, pedig valójá-

ban elektromos energia, mely akkor szabadul fel, ha az elektromos erők túlsúlyba kerülnek a vonzó magerőkkel szemben.

Végül megkérdezhetjük, hogy mi tart össze egy negatív töltésű elektront? (Az elektronban ugyanis nincsenek magerők.) Ha az elektron egyféle alapanyagból áll, minden részének taszítania kell a többit. Miért nem repül akkor széjjel? De vannak-e az elektronnak „részei”? Talán azt mondhatjuk, hogy az elektron csak egyetlen pont, és az elektromos erők csak *különböző* ponttöltések között hatnak, így az elektron nem hat saját magára? Lehetséges. Arról a kérdésről, hogy mi tartja össze az elektront, egyelőre csak annyit mondhatunk, hogy igen sok nehézséget támasztott, amikor az elektromágnesesség összefoglaló elméletét igyekeztek megalkotni. E kérdésre mindeddig még senki sem tudott választ adni. Részletesebb elemzésre a későbbi fejezetekben még sor kerül.

Mint láttuk, feltételezhető, hogy az elektromos erők és a kvantummechanikai hatások együttesen határozzák meg az anyag makroszkopikus szerkezetét, tehát a tulajdonságait. Vannak kemény anyagok, és vannak lágyak. Egyes anyagok elektromos *vezetők* – ugyanis elektronjaik szabadon mozoghatnak; mások *szigetelők* – mivel elektronjaik szorosan kötődnek az egyes atomokhoz. Később meg is vizsgáljuk, hogyan jönnek létre ezek a tulajdonságok, ez a vizsgálat azonban nagyon bonyolult, ezért kezdetben inkább csak egyszerű körülmények között tanulmányozzuk az elektromos erőket. Azzal kezdjük, hogy csupán az elektromosság törvényeit vizsgáljuk, beleértve a mágnesességet is, amely lényegében ugyanazon jelenségcsoporthoz tartozik.

Már mondtuk: az elektromos erők, a gravitációs erőhöz hasonlóan, a töltések közti távolság négyzetének reciprokával arányosan csökkennek. Ezt az összefüggést nevezik Coulomb-törvénynek. De ez a törvény már nem teljesen igaz a mozgó töltésekre; az elektromos erők bonyolult módon a töltések mozgásától is függenek. A mozgó töltések között ható erők egy részét *mágneses* erőnek nevezzük. Valójában ez is az elektromos hatás egyik megnyilvánulása. Ezért is nevezik ezt a tárgyat „elektromágnesesség”-nek.

Van egy fontos, általános elv, amely lehetővé teszi az elektromágneses erők viszonylag egyszerű tárgyalását. Kísérleti tapasztalatok szerint ugyanis egy adott töltésre ható erő, függetlenül a többi jelen levő töltések számától, mozgásától, kizárólag csak az adott töltés helyzetétől, sebességétől és nagyságától függ. A \mathbf{v} sebességgel mozgó q töltésre ható \mathbf{F} erő a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (53.1)$$

ahol \mathbf{E} az *elektromos tér*, \mathbf{B} pedig a *mágneses tér* a töltés helyén¹. Az a lényeg, hogy e két vektor megadásával a világegyetem összes többi töltéséből eredő elektromos erők összefoglalhatók. \mathbf{E} vektorok értéke függ a töltés *helyétől* és *időben* változhat. Ha az adott töltést egy másikkal helyettesítjük, az új töltésre ható erő éppen arányos lesz e töltés nagyságával, hacsak a világegyetemben maradó többi töltés nem változtatja meg helyzetét, illetve mozgását. (Gyakorlati körülmények között persze minden töltés erőhatást gyakorol a környezetében levő összes többi töltésre, mozgásba hozhatja azokat, s így előfordulhat, hogy a terek megváltoznak, ha egyik töltést a másikkal helyettesítjük.)

A 9. fejezet alapján meg tudjuk határozni egy részecske mozgását, ha ismerjük a rá ható erőt. Az (53.1) egyenletet a mozgásegyenlettel kombinálva adódik a következő egyenlet:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right] = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (53.2)$$

Vagyis, ha \mathbf{E} és \mathbf{B} ismert, a mozgás meghatározható. De tudni szeretnénk azt is, hogy hogyan jön létre \mathbf{E} és \mathbf{B} .

A terek létrejöttére vonatkozóan az egyik legfontosabb egyszerűsítő szabály a következő: Képzeljük el, hogy mozgó töltések egy csoportja \mathbf{E}_1 teret kelt, egy másik csoport pedig \mathbf{E}_2 -t. Ha mindkét töltéscsoport egyszerre van jelen (azaz ugyanabban a helyzetben és mozgásállapotban, mint voltak akkor, mikor külön-külön létezőnek tekintettük őket), akkor az általuk keltett tér éppen összegeződik:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \quad (53.3)$$

Ez a szabály a terekre vonatkozó *szuperpozíció elve*. A szuperpozíció elve természetesen a mágneses terekre is érvényes.

A szuperpozíció elve tehát kimondja: ha az *egyetlen* tetszőlegesen mozgó töltés által keltett elektromos és mágneses tér törvényét ismerjük, akkor az elektrodinamika összes törvényét ismerjük. Ha meg akarjuk tudni, milyen erők hatnak az A töltésre, akkor csak ki kell számítanunk egyenként a B, C, D stb. töltés által keltett \mathbf{E} és \mathbf{B} tereket, majd az \mathbf{E} -ket és \mathbf{B} -ket összeadjuk; az így kapott eredő térből kell kiszámítani az A töltésre ható erőket. Ha az derült volna ki, hogy az egyedi töltés által keltett tér egyszerű, akkor valóban így lehetett volna az elektrodinamika törvényeit a legtisztábban leírni. Ezt a – sajnos meglehetősen bonyolult – törvényt a 28. fejezetben egyszer már felírtuk.

¹Itt a tér nem tévesztendő össze a térerősséggel. A magyar terminológia szerint \mathbf{E} valóban az elektromos térerősség, \mathbf{B} -t viszont mágneses indukciónak nevezzük. (A *fordító* megjegyzése.)

Kiderül, hogy az elektrodinamika törvényei nem a várt alakban a legegyszerűbbek. *Nem* az a legegyszerűbb, ha felírjuk azt az erőt, amellyel az egyik töltés hat a többire. Igaz, hogy nyugvó töltésekre a Coulomb-törvény még egyszerű, de mozgó töltéseknél már bonyolulttá teszik az összefüggéseket – többek között – az időbeli késések és a gyorsulásból eredő hatások. Mindezt figyelembe véve, az elektrodinamikát nem pusztán a töltések között ható erők törvénye alapján tárgyaljuk; célszerűbb lesz egy másik nézőpontot választani – olyan nézőpontot, ahonnan az elektrodinamika törvényei a legkönnyebben kezelhetőnek mutatkoznak.

53.2. Elektromos és mágneses terek

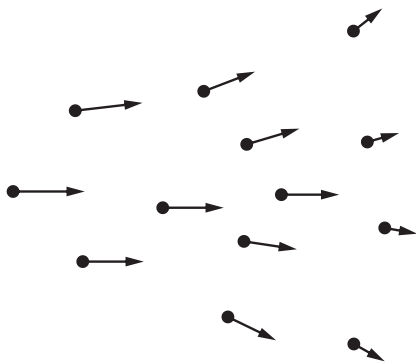
Először is, kissé általánosítanunk kell az elektromos és mágneses vektorokról alkotott fogalmainkat. \mathbf{E} -t és \mathbf{B} -t a magányos töltésre ható erők segítségével definiáltuk. Most beszélni szeretnénk elektromos és mágneses tér jelenlétéről *egy pontban*, még ha nincs is ott töltés. Valójában azt akarjuk mondani, hogy e pontban erők vannak, melyek „hatnak” a töltésre, de akkor is van még ott „valami”, mikor a töltés már nincs ott. Ha az x, y, z pontba helyezett töltés t időben az (53.1) által megadott \mathbf{F} erőt „érezkeli”, hozzárendelhetünk az (x, y, z) ponthoz \mathbf{E} és \mathbf{B} vektort is. Úgy gondoljuk, hogy $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ és $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ meghatározzák azokat az erőket, amelyeket az (x, y, z) pontba helyezett töltés „észlelne” a t időpillanatban. Mindössze azt a feltételt kell kikötnünk, hogy a töltés odahelyezése *nem változtatja* meg a teret keltő többi töltés helyét vagy mozgását.

Ennek az elképzelésnek az alapján, a tér minden x, y, z pontjához hozzárendelhetünk két vektort, \mathbf{E} -t és \mathbf{B} -t, melyek az időben is változhatnak. Az elektromos és mágneses teret tehát x, y, z és t vektorfüggvényeinek tekintjük. Mivel a vektort komponensei határozzák meg, ezért az $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ és a $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ terek mindegyike három, x, y, z és t -től függő matematikai függvényt jelent.

Éppen azért beszélhetünk *térről* (általánosított értelemben), mert \mathbf{E} (illetve \mathbf{B}) a közönséges értelemben vett háromdimenziós tér minden pontjában megadható. „Tér” bármilyen fizikai mennyiség, amely a tér különböző pontjaiban különböző értékeket vesz fel. Például a hőmérséklet is „tér” – ez esetben „skalártér” –, melyet $T(x, y, z)$ alakban írhatunk fel. A hőmérséklet az időben is változhat, ilyenkor időtől függő hőmérséklettéről beszélünk, és $T(x, y, z, t)$ alakban írhatjuk fel. Másik példa az áramló folyadék „sebességtere”. A folyadék sebessége a tér minden pontjában felírható a t időpillanatban $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ alakban. Ez „vektortér”.

De térjünk vissza az elektromágneses térhez. Habár a teret keltő töltések és a tér között igen bonyolult a kapcsolat, van egy fontos tulajdonságuk: egy *adott pontban* és egy *hozzá közeli pontban* felvett térértékek között igen egyszerű az összefüggés. Mindössze néhány, differenciálegyenlettel megadott összefüggés e tereket tökéletesen le tudja írni. Az elektromágnesesség törvényeit ilyen egyenletekkel tudjuk a legegyszerűbben felírni.

Különböző módon próbálták eddig a terek viselkedését szemléltetni. A legkifogástalanabb, egyben a legelvontabb is: ha a teret egyszerűen a tér és idő matematikai függvényének tekintjük. Ábrázolhatjuk is a teret, ha a tér sok pontjában vektorokat rajzolunk, melyek megadják az adott pontban a tér nagyságát és irányát (lásd az 53.1. ábrát). További módszer, hogy vonalakat rajzolunk, amelyek minden pontban érintőlegesen a vektorokra, s ezzel mintegy követik a nyilakat: mutatják a tér irányát.

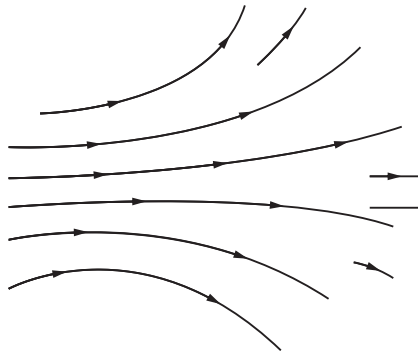


53.1. ábra. A vektorteret nyilakkal szemléltethetjük, amelyek nagysága és iránya jelzi a vektortér értékét és irányát a nyilak kezdőpontjában

Ezzel a módszerrel szem elöl tévesztjük a vektorok *hosszúságát*, viszont a tér erősségét jelezhetjük azáltal, hogy a vonalakat távol rajzoljuk egymástól, ahol a tér gyenge, és közel, ahol erős. Fogadjuk el azt a megállapodást, hogy a vonalakra merőleges *egységnyi* felületen áthaladó vonalak száma arányos a *tér erősségével*. Ez természetesen csak közelítés, és megköveteli – általában –, hogy helyenként új vonalakat indítsunk, tudniillik, hogy a vonalak száma elegendő legyen a térerősség jelzésére. Az 53.1. ábrabeli tér vonalakkal ábrázolva az 53.2. ábrán látható.

53.3. Vektorterek jellemzői

A vektortereknek van két, matematikailag fontos tulajdonságuk, amelyeket akkor használunk fel, amikor az elektromosság törvényeit „tér”-szempontból írjuk le. Képzeljünk el egy tetszőleges alakú zárt felületet,



53.2. ábra. Vektortér szemléltetése vonalakkal. A vonalak minden pontban érintőlegesek a vektor irányához képest, és sűrűségük arányos a vektor nagyságával

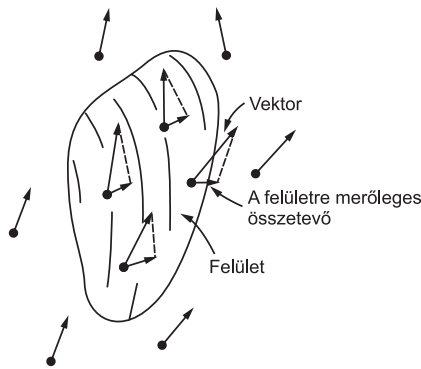
és nézzük meg, elveszhet-e „*valami*” annak belsejéből, azaz van-e a térnek *kiáramlási* tulajdonsága. Például a sebességtérrel kapcsolatban megkérdezhetjük, hogy a sebesség mindig kifelé mutat-e a zárt felülettel határolt térrészből, vagy általánosabban fogalmazva, (időegységenként) több folyadék folyik-e ki, mint be? A felületen időegység alatt átáramló „összes” folyadékmennyiséget a felületre vonatkozó *sebességfluxusnak* nevezzük. Egy felületelemen átáramló fluxus egyenlő a sebességnek a felületre merőleges összetevője szorozva a felületelem területével. Tetszőleges zárt felületen a *tiszta kifolyás* – vagy fluxus – a sebesség kifelé mutató normális irányú komponensének átlaga szorozva a felület területével:

$$\text{Fluxus} = (\text{átlagos normális irányú komponens}) \cdot (\text{felület területe}). \quad (53.4)$$

Matematikailag az elektromos tér esetében is definiálhatunk valami kiáramláshoz hasonlót, és ezt fluxusnak nevezzük, de ez a fluxus természetesen nem valamilyen anyag áramlása, mert az elektromos tér nem valaminek a sebessége. Kiderül azonban, hogy a tér átlagos normális összetevője mégis nagyon jelentős és hasznos matematikai fogalom. Ennek felhasználásával ugyanis elektromos fluxusról is beszélünk, melyet szintén az (53.4) egyenlettel definiálunk. Végül nemcsak teljesen zárt felületre hasznos a fluxus fogalma, hanem bármely véges nagyságú felületre is. Mint már előbb is láttuk, az ilyen felületen keresztülfolyó fluxust a vektor átlagos normális komponensének és a felület területének szorzataként definiáljuk. Ezeket a fogalmakat az 53.3. ábra szemlélteti.

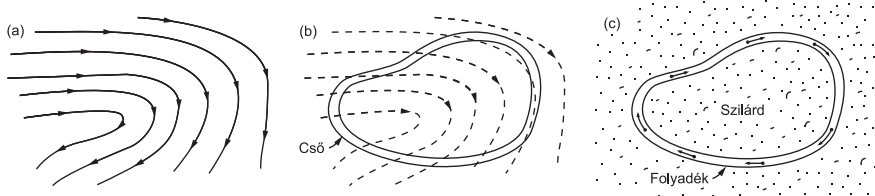
A vektortereknek van egy másik tulajdonságuk is, amely inkább vonallal, mint felülettel függ össze. Gondoljunk ismét a folyadék áramlását leíró sebességtérre. A következő érdekes kérdés kínálkozik: kering-e a folyadék? Ezen azt értjük: van-e „eredő” forgó mozgás valamilyen hurokban?

Tegyük fel, hogy hirtelen mindenütt megfagyasztjuk a folyadékot, kivéve egy önmagában visszatérő, egyenletes keresztmetszetű cső belsejét



53.3. ábra. Vektortérnek adott felületre vonatkozó fluxusa: a vektor normális összetevőjének átlaga szorozva a felület területével

(53.4. ábra). A csövön kívül megáll, de a cső belsejében tovább mozoghat a bezárt folyadék, ha van impulzusa, azaz ha a cső mentén egyik irányban nagyobb az eredő impulzus, mint a másik irányban. Definiáljuk a *cirkulációt* mint a csőben levő folyadék eredő sebességének és a cső kerületének szorzatát. Ismét általánosíthatunk, és definiálhatjuk a cirkulációt

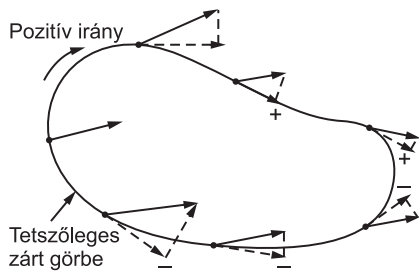


53.4. ábra. (a) Sebességtér folyadékban. Képzeljünk el egy állandó keresztmetszetű csövet, amely tetszőleges zárt görbe alakú, mint a (b) ábrán. Ha a folyadékot a cső kivételével mindenütt hirtelen befagyasztanánk, a folyadék a csőben úgy keringene, mint a (c) ábrán

tetszőleges vektortérre (még ha nem is mozog ott semmi). Tetszőleges *vektortérben* bármely képzelt zárt görbe mentén a cirkulációt úgy definiáljuk, mint a vektor átlagos (azonos körüljárási irányban vett) érintőleges komponense szorozva a zárt görbe kerületével (53.5. ábra).

$$\text{Cirkuláció} = (\text{átlagos érintőleges komponens}) \cdot (\text{a zárt görbe kerülete}). \quad (53.5)$$

Látni fogjuk, hogy ez a definíció valóban olyan számot ad meg, amely arányos a fent leírt, hirtelen befagyasztott csőben levő cirkuláció sebességével.



53.5. ábra. Vektortér cirkulációja: a vektor átlagos érintőleges összetevője (azonos körüljárási értelemben) szorozva a görbe kerületével

Történetesen ezzel a két fogalommal – fluxus és cirkuláció – írhatjuk fel az elektromosság és mágnesesség törvényeit. Lehet, hogy első hallásra még nem világos e törvények jelentése, de valami képet már kap az Olvasó, hogy végül is milyen módszerrel írható le az elektromágnesesség fizikája.

53.4. Az elektromágnesesség törvényei

Az elektromágnesesség első törvénye az elektromos tér fluxusát írja le:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \text{ tetszőleges zárt felületre vonatkozó fluxusa} &= \\ &= \frac{\text{a bezárt töltések összege}}{\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (53.6)$$

ahol ε_0 állandó. Ha a felület belsejében nincsenek töltések, akkor – ha vannak is a felületen kívül, a közelben töltések – \mathbf{E} átlagos normális összetevője nulla, így nem halad át eredő fluxus a felületen. Hogy az ilyen típusú állítás gyakorlati jelentőségét is szemléltessük, megmutatjuk, hogy az (53.6) egyenlet azonos a Coulomb-törvénnyel, csupán azt kell hozzávenni, hogy a magányos töltés tere gömbszimmetrikus. A ponttöltés köré rajzoljunk egy gömböt! Az átlagos normális összetevő minden pontban éppen \mathbf{E} hossza, mert a tér sugárirányú és azonos erősségű a gömb minden pontjában. Mármint a mi szabályunk szerint a gömbfelületen vett térnek és a gömb felületének szorzata – azaz a kimenő fluxus – arányos a belső töltéssel. Ha nagyobbra vesszük a gömb sugarát, a terület a sugárral négyzetesen nő. Az elektromos tér átlagos normális komponensének és a területnek a szorzata most is ugyanazzal a belső töltéssel lesz egyenlő, tehát a térnek a távolság négyzetével kell csökkennie – s így kapjuk meg az „inverz négyzetes” teret.

Ha egy tetszőleges térgörbe körül megmérjük az elektromos tér cirkulációját, azt találjuk, hogy általában nem nulla (jóllehet, Coulomb-térre nulla). Sőt, az elektromosságra fennáll egy másik törvény is, mely szerint bármely A (nem zárt) felületre, melynek határolója a C görbe, igaz a

következő:

$$\mathbf{E} \text{ cirkulációja } C \text{ mentén} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\text{-nek } A\text{-ra vonatkozó fluxusa}). \quad (53.7)$$

Az elektromágneses tér törvényeit kiegészíthetjük úgy, hogy két hasonló egyenletet írunk fel a \mathbf{B} mágneses térre.

$$\mathbf{B} \text{ tetszőleges zárt felületre vonatkozó fluxusa} = 0. \quad (53.8)$$

Egy C görbével határolt A felületre:

$$c^2 \cdot (\mathbf{B} \text{ cirkulációja } C \text{ mentén}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{E}\text{-nek } A\text{-ra vonatkozó fluxusa}) + \frac{\text{az } A\text{-n áthaladó elektromos áram}}{\varepsilon_0}. \quad (53.9)$$

Az (53.9) egyenletben a c^2 állandó (a fénysebesség négyzete) azért jelenik meg, mert a mágnesesség valójában az elektromosság relativisztikus effektusa. Az ε_0 állandó azért szükséges, hogy az elektromos áram egységeit alkalmas módon kapjuk meg.

Az elektrodinamika összes törvényét tartalmazzák az (53.6)...(53.9) egyenletek és az (53.1) egyenlet.² Talán emlékszünk még, hogy Newton törvényeit nagyon egyszerűen írtuk le, de ennek az ára egy csomó bonyolult következmény volt, és sok időnkbe került, míg mindent megtanultunk róluk. Az elektrodinamika törvényei távolról sem olyan egyszerűek, sőt még nehezebben írhatók le, mint Newton törvényei, ami azt jelenti, hogy a következményeik is bonyolultabbak, s így nyilván rengeteg időnkbe telik majd, amíg mindet megértjük.

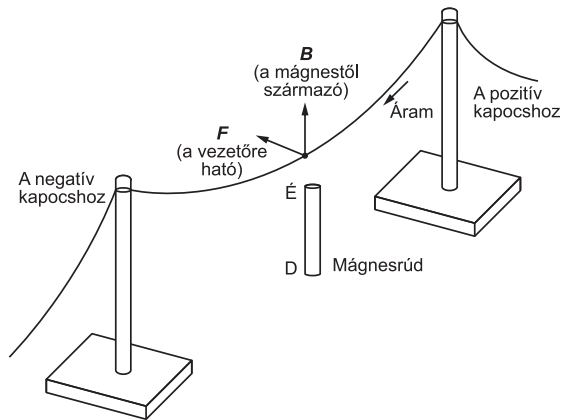
Az elektrodinamikai törvények némelyikét egy sor egyszerű kísérlettel szemléltethetjük, melyek kvalitatíve megmutatják az elektromos és mágneses terek összefüggéseit. Az (53.1) egyenlet első tagjával már nemegyszer találkoztunk fésűlködés közben, ezért nem is szükséges külön bemutatni. Az (53.1) egyenlet második tagja érzékeltethető, ha egy rúd mágnes felett függő vezetőn keresztül áram folyik (53.6. ábra). Ha ugyanis az áramot bekapcsoljuk, a vezető az $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ erő miatt elmozdul. Amikor áram folyik a vezetőben, benne a töltések \mathbf{v} sebességgel mozognak, és a mágnes mágneses tere erőt fejt ki rájuk, amely félrelöki a vezetőt.

Mikor a vezető balra lökődik, azt várnánk, hogy a mágnes ugyanakkor jobbra taszítást „érez”. (Ha nem így lenne, akkor az egész kísérleti berendezést egy mozgó kocsi tehetné fel, és lenne egy olyan reaktív

²Ehhez csak egy megjegyzést kell hozzátennünk, tudniillik a cirkuláció előjelére vonatkozó megállapodást.

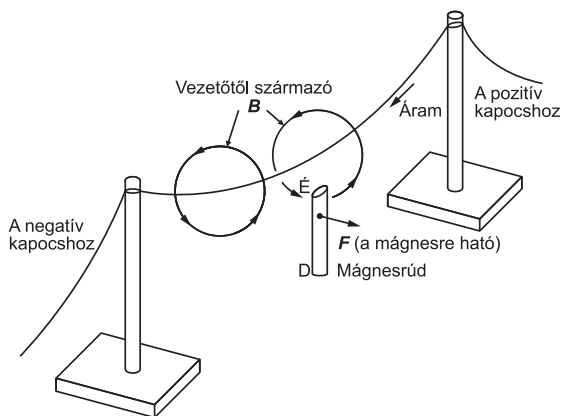
rendszerünk, melyben nem marad meg az impulzus!) Bár a mágnesre ható erő túl kicsi ahhoz, hogy láthatóan elmozdítsa azt, egy érzékenyebben felfüggesztett mágnes, például egy iránytű, kimutatja az elmozdulást.

Hogyan löki meg a vezető a mágnest?



53.6. ábra. A mágnesrúd \mathbf{B} mágneses teret kelt a vezetónél. Ha a vezetõben áram folyik, a vezetõ az $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ erõ következtében elmozdul

A vezetõben folyó áram létrehozza a saját mágneses terét, mely erõt fejt ki a mágnésre. Az (53.9) egyenlet utolsó tagjának megfelelõen, az áram által keltett \mathbf{B} -nek *cirkulációja* lesz – jelen esetben a \mathbf{B} vonalai a vezetõ körüli hurkok, mint azt az 53.7. ábra mutatja.

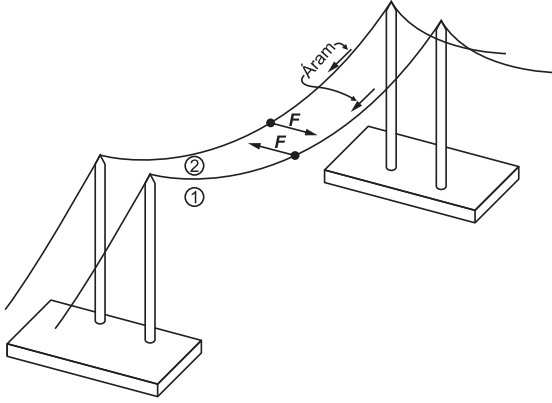


53.7. ábra. A vezetõ mágneses tere erõt fejt ki a mágnésre

Az (53.9) egyenlet azt is kimondja, hogy a vezetõn áthaladó adott áram \mathbf{B} cirkulációja a vezetõt körülvevõ bármely görbe mentén azonos. A vezetõtõl távolabb fekvõ görbéknek, mondjuk, köröknek, nagyobb a területük, így \mathbf{B} érintõleges összetevõjének csökkennie kell. Látni fogjuk,

hogyan valóban – amint várható – az egyenes hosszú vezető körül \mathbf{B} a távolsággal lineárisan csökken.

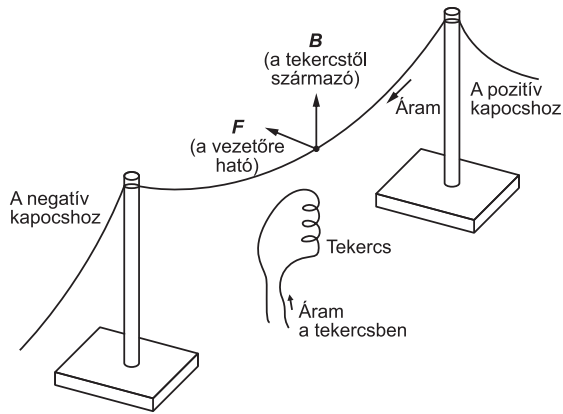
Mivel azt mondtuk, hogy a vezetőn átfolyó áram mágneses teret kelt, és ahol mágneses tér van, ott erő hat az áramot vivő vezetőre, ezért azt kell várnunk, hogy ha egy vezető körül árammal mágneses teret keltünk, az erőhatást fejt ki egy áramot vivő másik vezetőre. Ezt két felfüggesztett vezetővel be is lehet mutatni (53.8. ábra). Ha az áramok azonos irányúak, a két vezető vonzza egymást, ha ellenkező irányúak, taszítják egymást.



53.8. ábra. Két vezető, amelyben áram folyik, erőt gyakorol egymásra

Röviden: az elektromos áramok éppúgy, mint a mágnesek, mágneses teret hoznak létre. De itt álljunk meg egy kicsit. Mi is hát a mágnes tulajdonképpen? Ha mozgó töltések mágneses teret keltenek, nem lehetséges-e, hogy egy vasdarab mágneses tere valójában áramok következménye? Úgy látszik, hogy ez így is van. Kísérletünkben a rúd-mágneszt az 53.9. ábra szerint helyettesíthetjük tekercsel. Ha áram halad keresztül a tekercsen, valamint a felette levő egyenes vezetőn, pontosan úgy mozdul el, mint az előbb, amikor mágneszt tettünk a tekercs helyére. Más szóval, a tekercsben folyó áram az állandó mágneszt utánozza. Úgy tűnik, a vasdarab úgy hat, mintha örökké keringő áram lenne benne. Valóban, a mágnesek viselkedését megérthetjük, ha feltételezzük, hogy állandó áramok vannak a vasatomokban. Az 53.7. ábrán a mágnesre ható erő az (53.1) egyenlet második tagjának tulajdonítható.

Honnan származnak ezek az áramok? Egyik lehetséges ok lenne az elektronok mozgása az atomi pályákon. A vasban azonban nem ez a helyzet, bár néhány más anyagnál így van. Ugyanis az atomban az elektron a körmozgáson kívül a saját tengelye körül is forog (olyasmi ez, mint a Föld tengely körüli forgása), és ebből a forgásból származik az az áram, amely a vasban mágneses teret kelt. (Azt mondtuk, „olyasmi, mint a Föld



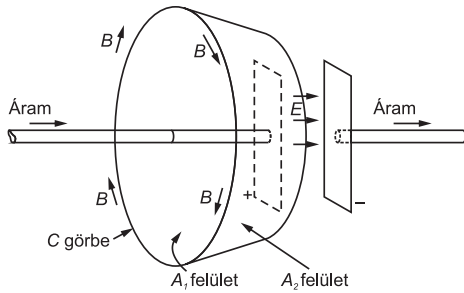
53.9. ábra. Az 53.6. ábrán látható mágnesrudat helyettesíthetjük egy tekercssel, amelyben áram folyik. A vezetőre az előbbihez hasonlóan erő hat

forgása”, mert annyira sajátosan kvantummechanikai ez a jelenség, hogy klasszikus fogalmakkal tulajdonképpen nem is igen lehet jól leírni.) A legtöbb anyagban egyik elektron így pörög, a másik amúgy, ezért a mágnesesség kioltódik, de a vasban – rejtélyes okból, melyről később még beszélünk – sok elektron pörög azonos irányú tengelyek körül, s ez a mágnesesség forrása.

Mivel a mágnesek tere áramokkal adódik, az (53.8) és (53.9) egyenletekben nem kell külön taggal figyelembe vennünk a mágnesek jelenlétét. Az *összes* áramot kell tekintetbe vennünk, beleértve a pörgő elektronok köráramait is, és akkor a törvény igaz. Továbbá észre kell vennünk, hogy az (53.8) egyenlet kimondja: nincsenek mágneses „töltések”, melyek megfelelnek az (53.6) egyenlet jobb oldalán megjelenő elektromos töltéseknek. Nem is találtak még ilyeneket.

Az (53.9) egyenlet jobb oldalának első tagját Maxwell elméletileg fedezte fel. Ez nagyon fontos felfedezés volt: a változó elektromos terek mágneses hatásokat hoznak létre. Valójában e tag nélkül az egyenletnek nem lenne értelme, ugyanis enélkül nem lehetnének áramok olyan áramkörökben, melyek nem teljesen zártak. Ilyen áramok viszont léteznek, mint a következő példából is láthatjuk. Képzeljünk el egy síkkondenzátort. A töltőáram az 53.10 ábra szerint folyjék egyik lemeztől a másik felé. Most vegyük körül egy zárt görbével (C) az egyik vezetőt, illesszünk erre a görbére egy olyan felületet, mely metszi a vezetőt. Az ábrán ez az A_1 felület. Az (53.9) egyenletnek megfelelően a \mathbf{B} tér C menti cirkulációját (szorozva c^2 -tel) a vezetőben folyó áram adja (osztva ϵ_0 -lal). De mi lesz, ha a görbére egy másik, tál alakú felületet illesztünk (A_2), mely a kondenzátor lemezei között halad át, de nem metszi a vezetőt? Bizonyosra vehető, hogy

ezen a felületen keresztül nem folyik áram. De az is biztos, hogy pusztán egy képzeletbeli felület helyzetének megváltoztatása nem változtat meg egy valódi mágneses teret! \mathbf{B} cirkulációjának ugyanannyinak kell lennie, mint amennyi az előbb volt. Az (53.9) egyenlet jobb oldalának első tagja valóban úgy kombinálódik a második taggal, hogy a két felületre, A_1 és A_2 -re ugyanaz az eredmény adódik. Az A_2 felületen \mathbf{B} cirkulációját a lemezek közötti \mathbf{E} fluxusának változási sebessége szabja meg. Végülis \mathbf{E} megváltozása éppen olyan módon függ össze az árammal, hogy az (53.9) egyenlet kielégüljön. Maxwell felismerte, hogy ez szükségszerű, és ő volt az első, aki a teljes egyenletet felírta.



53.10. ábra. \mathbf{B} -nek a C görbe menti cirkulációja meghatározható vagy az A_1 felületen áthaladó áram alapján, vagy \mathbf{E} -nek az A_2 felületre vonatkozó fluxus-változásával

Az 53.6. ábrán bemutatott elrendezéssel az elektromágnesesség egy másik törvényét is szemléltethetjük. A felfüggesztett vezető végeit kapcsoljuk le a telepről, és kapcsoljuk be egy galvanométert, amely jelzi, ha a vezetőben áram folyik. Ha a mágnes mágneses terében oldalra kimosdítjuk a vezetőt, a galvanométeren áramot figyelhetünk meg. Ez a hatás ismét az (53.1) egyenletnek egy másik következménye: a vezetőben levő elektronokra $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ erő hat. Az elektronoknak oldalirányú sebességük van, mivel együtt mozognak a vezetővel. Ez a \mathbf{v} a mágnes függőleges irányú \mathbf{B} terével együtt azt eredményezi, hogy az elektronokra ható erő a vezető irányába mutat, és elindítja az elektronokat a galvanométer felé.

Tegyük fel most, hogy nem nyúlunk a vezetőhöz, hanem a mágneset mozgatjuk. A relativitás alapján semmi eltérést nem várhatunk – és valóban, most is áramot figyelhetünk meg a galvanométerben. Hogyan fejt ki erőt a mágneses tér a nyugvó töltésekre? Az (53.1) egyenlet szerint elektromos térnek kell megjelennie. Mozgó mágnesnek elektromos teret kell létrehoznia. Hogy ez pontosan hogyan történik, azt az (53.7) egyenlet írja le. Ennek az egyenletnek nagy gyakorlati jelentősége van, mert azokat a folyamatokat írja le, amelyek az elektromos generátorokban és transzformátorokban játszódnak le.

Egyenleteink legfigyelemreméltóbb következménye, hogy az (53.7) és (53.9) egyenlet egybevetésével megmagyarázható az elektromágneses hatások nagy távolságokra való kisugárzása. A magyarázat nagy vonalakban a következő: tegyük fel, hogy van valahol egy mágneses térünk, amely növekszik, mert, mondjuk, hirtelen áramot kapcsolunk be egy vezetőbe. Ekkor az (53.7) egyenlet szerint cirkulációval rendelkező elektromos tér keletkezik. Amikor az elektromos tér felépül és létrehozza cirkulációját, akkor az (53.9) egyenletnek megfelelően mágneses cirkuláció lép fel. De *ennek* a mágneses térnek a felépülése az elektromos tér új cirkulációját hozza létre és így tovább. Így haladnak a térben az elektromágneses terek anélkül, hogy ehhez töltésekre vagy áramokra lenne szükségük, kivéve a forrásuknál. Vajon látnánk-e egymást, ha ez nem így volna? Ez mind benne van az elektromágneses tér egyenleteiben!

53.5. Mi is a „tér”?

Néhány szóban megpróbáljuk összefoglalni, hogyan vélekedünk mi erről a kérdésről. Az Olvasó nyilván így látja: „Mindezek a fluxusos és cirkulációs ügyek túlon túl elvontak. Ott vannak az elektromos terek a tér minden pontjában, és aztán itt vannak ezek a „törvények”. De mi is a valóság? Miért nem magyarázhatunk meg mindent olyasvalamivel, ami közvetlenül a töltések között játszódik le?” Nos, ez jórészt saját előítéleteinken múlik. Sok fizikus azt vallja, hogy direkt hatás, azaz, hogy semmi se legyen közben, elképzelhetetlen. (Hogy találhatnak valamit elképzelhetetlennek, amit már elképzelték?) Azt mondogatják: „Lássuk be, hogy az egyetlen erő, amit ismerünk, egy anyagdarab direkt hatása egy másikra. Lehetetlen, hogy egy erőt ne közvetítsen semmi.” De mit is tapasztalunk valójában, amikor anyagdarabok „direkt hatását” tanulmányozzuk? Észrevesszük, hogy a két anyagdarab nem közvetlenül illeszkedik egymáshoz, hanem kis hézag van közöttük, és ott mikroszkopikus léptékben elektromos erők hatnak. Oda jutottunk, hogy az úgynevezett direkt kontakt hatást akarjuk megmagyarázni az elektromos erőkép alapján. Nyilván nincs értelme ragaszkodni ahhoz, hogy az elektromos erőnek ugyanolyannak kell lennie, mint a régi, megszokott, izmokkal végzett taszításnak és húzásnak, különösen, ha kiderül, hogy ezeket a taszításokat és húzásokat elektromos erőkként kell értelmezni! Az egyetlen értelmes kérdés tehát ez lenne: Melyik a legkényelmesebb út az elektromos hatások vizsgálatára. Vannak, akik a töltések távolhatásával magyarázzák ezeket a hatásokat, és egy bonyolult törvényt alkalmaznak. Mások inkább az erővonalakat szeretik, mindig csak erővonalakat rajzolnak, és úgy érzik, hogy **E**-t és **B**-t írni túl-

ságosan elvont. Az erővonalak azonban csak nyers képet adnak a térről, és pontos kvantitatív törvényeket megadni az erővonalak segítségével igen nehéz lenne. Ezenkívül az erővonalas elképzelés nem tartalmazza az elektrodinamika legmélyrehatóbb elvét, a szuperpozíció elvét. Még ha tudjuk is, hogyan néznek ki az erővonalak egyik töltésrendszerre és hogyan a másikra, fogalmunk sincs róla, milyen lenne az erővonalkép, ha mindkét rendszer egyszerre lenne jelen. Másrészt matematikai szempontból a szuperpozíció egyszerű – csak össze kell adnunk két vektort. Az erővonalak annyiból előnyösek, hogy szemléletes képet nyújtanak, de van hátrányuk is. A direkt kölcsönhatás elve nagyon előnyös, ha az elektromos töltések nyugalomban vannak, de súlyos hátrányai is megmutatkoznak, ha gyorsan mozgó töltéseket vizsgálunk.

Legjobb a tér absztrakt fogalmát használni. Az elvontság sajnálatos, de szükségszerű. A fizikusok számtalanszor megpróbálták már az elektromos teret úgy ábrázolni, mint fogaskerekek mozgását, vagy leírni az erővonalakat, vagy valamiféle anyag feszültségeiként kezelni, s mindegyikre több időt és energiát fordítottak, mint amennyi ahhoz kellett volna, hogy egyszerűen megkapják a helyes válaszokat az elektrodinamika problémáira. Érdekes, hogy a fény kristályokbeli viselkedését helyesen leíró egyenleteket MacCullagh már 1839-ben kidolgozta, ám azt mondták neki: „Igaz, de ha egyszer nincs olyan létező anyag, melynek mechanikai tulajdonságai ki tudnák esetleg elégíteni ezeket az egyenleteket, és mivel a fény rezgés, aminek *valamiben* rezegnie kell, nem hihetünk ennek az egész absztrakt egyenletügynék.” Ha a tudós kortársak elfogulatlanabbak lettek volna, jóval hamarabb eljuthattak volna a fény viselkedését leíró egyenletekhez.

A mágneses térrel kapcsolatban a következőképp érvelhetünk: Tegyük fel, hogy valakinek sikerült végül is felépítenie egy sémát a mágneses térről, vonalak vagy a térben forgó fogaskerekek segítségével. Ezután próbálja csak megmagyarázni, mi történik akkor, ha két azonos sebességű töltés egymással párhuzamosan mozog a térben. Mivel mozognak, úgy viselkednek, mint két áram, és mágneses terük is lesz (mint az 53.8. ábra vezetőiben folyó áramnak). Egy megfigyelő azonban, aki együtt mozog a két töltéssel, mindkettőt állónak látná, és azt mondaná, hogy *nincs* mágneses tér. A „fogaskerekek” vagy „vonalak” eltűnnek, ha a megfigyelő együtt „utazik” a töltésekkel! Mindössze annyit értünk el, hogy egy új problémát találtunk ki. Hogyan tűnhetnek el a fogaskerekek?! Aki erővonalakkal ábrázol, hasonló nehézségekkel találkozik. Nemcsak azt nem tudja megállapítani, hogy az erővonalak együtt mozognak-e a töltésekkel vagy sem, de a vonalak teljesen el is tűnhetnek bizonyos koordináta-rendszerekben.

Nos, mi azt mondjuk, hogy a mágnesesség valójában relativisztikus effektus. Az említett párhuzamosan mozgó két töltés esetében azt várjuk, hogy mozgásukban v^2/c^2 nagyságrendű relativisztikus korrekciókat kell alkalmazni. Ezeket a korrekciókat kell megfeleltetni a mágneses erőknek. De mi a helyzet a kísérletünkben szereplő két vezető (53.8. ábra) között ható erővel? Itt a mágneses erő az *egyetlen* erő, és egyáltalában nem úgy fest, mint valami „relativisztikus korrekció”. Ha megbecsüljük az elektronok sebességét a vezetékben (ezt az Olvasó maga is megteheti), azt találjuk, hogy az átlagos sebesség körülbelül 0,01 cm/s. Tehát $v^2/c^2 \approx 10^{-25}$. Bizonyára elhanyagolható „korrekció”. No de mégsem! Jóllehet, a mágneses erő, jelen esetben, 10^{-25} -öd része a mozgó elektronok között ható „közönséges” elektromos erőnek, ne feledjük, hogy a „közönséges” elektromos erők eltűnnek a majdnem tökéletes kiegyensúlyozottság folytán – hiszen a vezetőben ugyanannyi proton van, mint ahány elektron. Az egyensúly sokkal tökéletesebb, mint $1 : 10^{25}$, és a kis relativisztikus tag, amelyet mágneses erőnek nevezünk, az egyetlen, ami megmaradt. Ez lesz az uralkodó tag.

Az elektromos hatásoknak ez a szinte tökéletes kiegyenlítetttsége tette lehetővé a relativisztikus effektusok (azaz a mágnesesség) tanulmányozását és a (v^2/c^2 nagyságrendig) helyes egyenletek felfedezését, jóllehet a fizikusok akkor nem is *tudták*, valójában mire bukkantak rá. Ezért volt az, hogy amikor a relativitást felfedezték, az elektromágnesesség törvényeit nem kellett megváltoztatni, mert – a mechanikával ellentétben – már v^2/c^2 pontosságig helyesek voltak.

53.6. Elektromágnesesség a tudományban és a technikában

E fejezet végen még rá szeretnénk mutatni arra, hogy a görögök által tanulmányozott tömérdek jelenség közül kettő különös figyelmet érdemel: ha megdörzsöltek egy darab borostyánt, fel lehetett vele emelni kis papiruszdarabokat, és volt egy – Magnészia környékéről származó – különös kő, mely vonzotta a vasat. Furcsa, hogy a görögök csak ezt a két jelenséget ismerték mint az elektromosság és mágnesesség megnyilvánulását. Ennek oka elsősorban a töltéseknek már korábban említett, hihetetlenül tökéletes egyensúlya. Azok a tudósok, akik a görögök után következtek, sorra újabb és újabb jelenségeket fedeztek fel, amelyek valójában mind ugyancsak a borostyánkő-, illetve mágneskőhatás különböző megnyilvánulásai voltak. Ma már rájöttünk, hogy a kémiai kötések, sőt végső soron magát az életet is az elektromágnesesség fogalmait figyelembe véve kell megértenünk.

Miközben az elektromágnesesség értelmezésében fokozatosan előrehaladt a tudomány, az emberek minden korábbi elképzelését felülmúló technikai lehetőségek tárultak fel: lehetségessé vált nagy távolságokra távíróval jelzéseket adni, másik személlyel közvetlen összeköttetés nélkül beszélgetni, óriási erőműveket működtetni stb., stb. Egy nagy vízikerék, melyet száz mérföldeken át távvezetékek kötnek össze egy másik géppel, mely a főkeréknek megfelelően forog; a sok ezer szerteágazó vezető, tízezernyi motor tízezer helyen, melyek ipari és háztartási gépeket hajtanak – mindez mozog és működik, mert ismerjük az elektromágnesesség törvényeit.

Manapság még finomabb hatásokat is alkalmazunk a gyakorlatban. Az elektromos erők, bármily hatalmasak is, nagyon nagy pontossággal ellenőrizhetők, és nagyon sokféleképpen használhatjuk fel őket. Olyan finomak a készülékeink, hogy több száz kilométernyi távolságból is meg tudjuk mondani, mit csinál valaki. Ezt annak a hatásnak a segítségével tudjuk megtenni, amit az elektromágneses tér egy vékony fémrúd elektronjaira gyakorol. Mindössze annyit kell tennünk, hogy ezt a rudat egy televíziós vevő antennájaként használjuk.

Távolabbi perspektívában, mondjuk, tízezer évvel későbből tekintve az emberiség történelmét, nem kétséges, a 19. század legjelentősebb eseményének azt fogják tartani, hogy Maxwell felfedezte az elektrodinamika törvényeit. Az amerikai polgárháború pedig jelentéktelen helyi eseménnyé szürkül ugyanazon évtized ezen fontos tudományos eseménye mellett.

Vektorterek differenciálszámítása

54.1. Megérteni a fizikát...

A fizikusnak hozzá kell szoknia ahhoz, hogy egy-egy problémát vagy feladatot több szempontból is vizsgáljon. A valóságos fizikai problémák pontos analízise általában nagyon bonyolult, és bármely adott fizikai helyzet túl bonyolult ahhoz, hogy közvetlenül egy differenciálegyenlet megoldása útján elemezni lehessen. Mégis, fogalmat alkothatunk magunknak egy rendszer viselkedéséről, ha van valami előzetes sejtésünk, hogy különböző körülmények között milyen jellegűek a megoldások. Ilyen célra igen hasznos fogalmak: az erővonalkép, a kapacitás, az ellenállás, az indukció. Ezek elemzésére több időt szentelünk, így azután kialakul egy bizonyos érzékünk, hogy előre meg tudjuk mondani, mi a teendő a különböző elektromágneses feladatokkal. Másrészt azonban azt is tudnunk kell, hogy sem az erővonalak, sem egyéb heurisztikus modellek nem tökéletesek és nem adnak pontos képet. A törvényeket pontosan megfogalmazni csak egyféleképpen, mégpedig a differenciálegyenletekkel lehet. Ezeknek megvan az az előnyük, hogy alapvetőek és – amennyire tudjuk – pontosak. Ha egyszer megtanultuk a differenciálegyenleteket, később mindig vissza-visszatérünk hozzájuk. Semmit sem szabad elfelejtenünk belőlük.

Időbe telik, míg megtanuljuk, hogyan kell felismernünk azt, hogy a különböző körülmények között minek is kell történnie. Meg is kell oldanunk az egyenleteket. S valahányszor megoldjuk az egyenleteket, mindig megtanulunk valamit a megoldások természetéről. A megoldások emlékezetben tartásához is hasznos, ha ezeket az erővonalkép vagy egyéb elképzelések alapján tanulmányozzuk. Így lehet valóban *megérteni* az egyenleteket. Ez a különbség a matematika és a fizika között. A matematikusok vagy a nagyon matematikus gondolkodású emberek gyakran tévútra térnek a fizika tanulmányozása közben, mert elvesztik szem elől magát a fizikát. Azt mondják: „Íme, ezek a differenciálegyenletek – a Maxwell-egyenletek –, ez az elektrodinamika lényege, hiszen a fizikusok elismerik, hogy minden benne foglaltatik ezekben az egyenletekben. Meglehetősen bonyolultak, de mégiscsak matematikai egyenletek, s ha matematikailag töviről hegyire értem őket, akkor a fizikát is töviről hegyire értem.” Csakhogy ez így nem vezet célra... Az ilyen beállítottságú matematikusok – és sokan vannak ilyenek – általában nemigen járulnak hozzá a fizika fejlődéséhez, de

tulajdonképpen a matematikáéhoz sem. Kudarcot vallanak, mert a valódi világ konkrét fizikai helyzetei olyan bonyolultak, hogy az egyenletek sokoldalú, sokkal mélyebb, átfogóbb megértése elkerülhetetlen.

Mit jelent igazából megérteni egy egyenletet, azaz mélyebben, mint szigorúan matematikai értelemben? Ezt Dirac fogalmazta meg: „Értem, hogy mit jelent egy egyenlet, ha a megoldását nagy vonalakban fel tudom vázolni anélkül is, hogy valóban megoldanám.” Tehát, ha fel tudjuk ismerni, hogy minek kell bekövetkeznie adott körülmények között, anélkül, hogy megoldanánk az egyenleteket, akkor az adott körülményekre alkalmazva „értjük” az egyenleteket. A fizikai gondolkodás egyáltalán nem matematikai jellegű, nem szabatos, nem pontos, de egy fizikusnak feltétlenül szükséges.

A fizikai előadás-sorozatok, mint ez a könyv is, a fizikai fogalmakat fokozatosan építik fel, rendszerint egyszerű helyzetekből indulnak ki, és egyre bonyolultabbak felé haladnak. Ez megkívánja, hogy fejezetről fejezetre elfelejtsük az előzőleg tanultaknak egy részét – ami igaz volt bizonyos adott helyzetre nézve, de nem igaz általában. Például az a törvény, hogy az elektromos erő a távolság négyzetétől függ, nem *mindig* igaz.

Mi előnyben részesítjük a fordított megközelítést: előbb tárgyalni a *teljes* törvényeket és azután, visszafelé lépve, alkalmazzuk ezeket az egyszerű esetekre, és menet közben kialakítjuk a fizikai fogalmakat. Így járunk el most is.

Megközelítési módszerünk homlokegyenest ellentétes a hagyományos tárgyalásmóddal, amely a tárgyat az információkat nyújtó kísérletekre alapozva fejti ki. De a fizikát az elmúlt 200 év során jónéhány zseniális tudós fejlesztette tovább, és úgysem foglalkozhatunk mindazzal, amit csináltak, mivel korlátozott az időnk az ismeretek megszerzésére.

Sajnos, többé-kevésbé kimaradt a kísérleti fizika történeti fejlődésének ismertetése. Remélhetőleg néhány hiányosságot a szemináriumok pótolni fognak. Az Olvasó az *Encyclopedia Britannica* olvasásával is kitöltheti ismereteinek hézagait, kiváló cikkeket talál benne az elektromosság és a fizika egyéb területeinek történetéről. Sok más olyan kézikönyv is fellelhető az elektromágnesességről, amelyekben szintén megtalálhatók a fontosabb történeti adatok.

54.2. Skalár- és vektorterek – T és \mathbf{h}

Az elektromágnesesség absztrakt, matematikai szemszögből való tárgyalásával kezdjük, s végső célunk az, hogy az 53. fejezetben megadott törvények jelentését kifejtsük. De ahhoz, hogy ezt megtehessük, előbb meg

kell magyaráznunk azt az új és különös jelölést, amelyet itt használni akarunk. Feledkezzünk el egy időre az elektromágnesességről, és beszéljünk a vektorterek matematikájáról. Ez nagyon fontos, nemcsak az elektromágnesesség, hanem mindenfajta más fizikai folyamat leírásánál is. Mint ahogy a közönséges differenciál- és integrálszámítás fontos a fizika minden ágában, ugyanúgy nagyon fontos a vektoranalízis is.

Alább felsorolunk néhány fogalmat, illetve tételt a vektoralgebrából. Föltesszük, hogy az Olvasó már jórészt ismeri ezeket:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \text{skalár} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (54.1)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{vektor} \quad (54.2)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (54.3)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (54.4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (54.5)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B}) \quad (54.6)$$

Továbbá szükségünk lesz a differenciálszámításból is a következő két egyenlőségre:

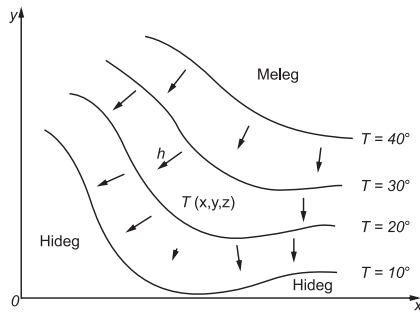
$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z, \quad (54.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (54.8)$$

(54.7) természetesen csak a $\Delta x, \Delta y$ és $\Delta z \rightarrow 0$ határátmenetnél igaz.

A lehető legegyszerűbb fizikai tér a skalártér. Emlékeztetnünk kell rá, hogy téren olyan mennyiséget értünk, amelynek értéke a háromdimenziós térbeli helyzettől függ.

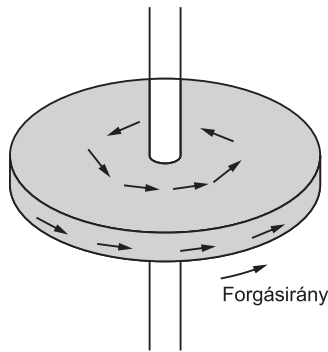
Skalártéren egyszerűen olyan teret értünk, amelyet minden pontban egyetlen szám, egy skalár jellemez. Természetesen ez a szám az időben változhat, de e pillanatban nem kell ezzel törődnünk. Arról fogunk beszélni, hogy milyen a tér egy adott pillanatban. Példaként a skalártérre, tekintsünk egy testet, amelyet egyes helyeken melegítünk, más helyeken hűtünk, úgyhogy a test hőmérséklete pontról pontra, bonyolult módon változik. Így a hőmérséklet a háromdimenziós térbeli hely: x, y és z függvénye lesz, a helykoordinátákat derékszögű koordináta-rendszerben mérjük. A hőmérséklet skalártér.



54.1. ábra. A T hőmérséklet példa a skalártérre. Minden egyes (x, y, z) ponthoz hozzá van rendelve egy $T(x, y, z)$ szám. A $T = 20^\circ\text{C}$ -kal jelölt felületen (amelyet a $z = 0$ síkban egy görbe ábrázol) minden pontban azonos a hőmérséklet. A nyilak a \mathbf{h} hőáramvektort ábrázolják néhány pontban

A skalárteret „szintvonalakkal” ábrázolva is elképzelhetjük; ezek olyan képzeletbeli felületek, amelyek áthaladnak az összes ponton, ahol a tér ugyanakkora értéket vesz fel, éppúgy, ahogyan a szintvonalak a térképen összekötik az azonos magasságú helyeket. Hőmérsékleti tér esetében a szintvonalakat *izotermális felületeknek* vagy *izotermáknak* nevezzük. Az 54.1. ábra hőmérsékleti teret ábrázol és T -nek x -től és y -től való függését mutatja, ha $z = 0$. Néhány izotermát felrajzoltunk az ábrára.

Van *vektortér* is. A fogalom nagyon egyszerű. Adott egy vektor a tér minden egyes pontjában. A vektor pontról pontra változik. Tekintsünk például egy forgó testet. A test anyagának sebessége minden pontban egy vektor, amely a hely függvénye (54.2. ábra). Másik példaként tekintsünk



54.2. ábra. Atomok sebességei egy forgó testben: példa a vektortérre

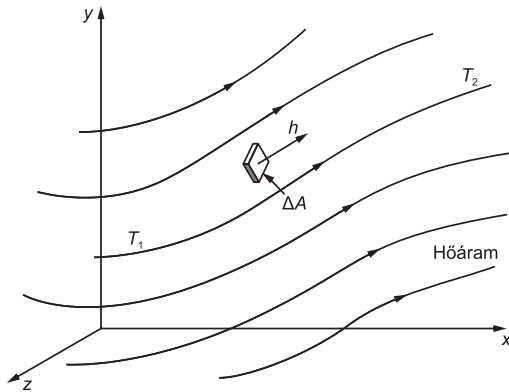
egy kiterjedt testben végbemenő hőáramlást. Ha a testben a hőmérséklet egyik helyen magas, a másik helyen alacsony, a melegebb helyekről hő áramlik a hidegebb helyek felé. A test különböző helyein a hő különböző irányban áramlik.

A hőáram irányított mennyiség, amit \mathbf{h} -nak nevezünk. Nagysága az átáramló hőmennyiséget mutatja. Az 54.1. ábrán a hőáramvektorokat is berajzoltuk.

Adjunk egy kicsit pontosabb meghatározást a \mathbf{h} -ra. A vektor hossza bármely pontban egyenlő az áramlás irányára merőleges, infinitesimalis felületelemen áthaladó, egységnyi időre és egységnyi területre eső hőmennyiséggel. A vektor az áramlás irányába mutat (54.3. ábra). Képletben: ha ΔJ az a hőenergia, amely egységnyi idő alatt áthalad a ΔA felületelemen, akkor

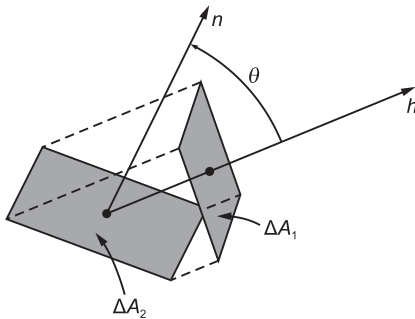
$$\mathbf{h} = \frac{\Delta J}{\Delta A} \mathbf{e}_a, \quad (54.9)$$

ahol \mathbf{e}_a az áramlás irányába mutató *egységvektor*.



54.3. ábra. A hőáram-vektortér. A \mathbf{h} vektor az áram irányába mutat. Nagysága: az áram irányára merőleges felületen egységnyi idő alatt áthaladó energia osztva a felületelek területével

A \mathbf{h} vektort másképpen is meghatározhatjuk, tudniillik a komponenseivel. A kérdést úgy tesszük fel, hogy mennyi hőenergia áramlik át egy kis felületen, amely *tetszőleges* szöget zár be a hőáramlás irányával. Az 54.4. ábrán egy kis ΔA_2 felületet rajzoltunk fel, amely szöget zár be az áramlásra merőleges ΔA_1 felülettel. Az \mathbf{n} *egységvektor* merőleges a ΔA_2



54.4. ábra. A ΔA_2 -n áthaladó hőáram egyenlő a ΔA_1 -en áthaladóval

felületre. Az \mathbf{n} és \mathbf{h} közötti ϑ szög megegyezik a felületek közötti szöggel (mivel \mathbf{h} merőleges ΔA_1 -re). Mennyi hőenergia áramlik át a ΔA_2 *egységnyi felületén*? ΔA_2 -n ugyanannyi áramlik át, mint ΔA_1 -en, csak a felüle-

tek nagysága különböző. Valóban: $\Delta A_1 = \Delta A_2 \cos \vartheta$. A ΔA_2 -n át haladó hóáramra

$$\frac{\Delta J}{\Delta A_2} = \frac{\Delta J}{\Delta A_1} \cos \vartheta = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}. \quad (54.10)$$

Ezt az egyenlőséget a következőképp értelmezzük: az \mathbf{n} normális egységvektorú, *tetszőleges felületen* áthaladó, egységnyi időre és felületre eső hóáramot a $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$ szorzat adja meg. Vagy másként úgy is mondhatjuk, hogy a hóáramnak a ΔA_2 felületelemre merőleges komponense: $\mathbf{h}\mathbf{n}$. Ha úgy tesszük, azt is mondhatjuk, hogy ezek az állítások definiálják \mathbf{h} -t. Ugyanezt az elképzelést más vektorterekre is alkalmazni fogjuk.

54.3. Terek deriváltjai – a gradiens

Ha a terek időben változnak, leírhatjuk a változásukat úgy is, hogy megadjuk a t szerinti deriváltjaikat. A hely szerinti változásukat hasonló módon szeretnénk leírni, mivel bennünket az érdekel, hogy milyen kapcsolat van, mondjuk, az egyik hely hőmérséklete és a közeli helyek hőmérséklete között. Hogyan kell meghatározni a hőmérsékletnek a hely szerinti deriváltját? Hogyan kell deriválni a hőmérsékletet: x szerint? y szerint? Vagy z szerint?

A gyakorlatilag hasznos fizikai törvények nem függnek a koordináta-rendszer állásától. Ezért olyan alakban kell őket felírni, amelyben vagy mindkét oldal skalár, vagy mindkét oldal vektor. Egy skalártérnek mik a deriváltjai, például mi a $\partial T / \partial x$? Skalár, vagy vektor, vagy micsoda? Sem nem skalár, sem nem vektor, mint azt könnyen kitalálhatják, mert ha másik x tengelyt választunk, $\partial T / \partial x$ bizonyosan más lesz. De figyeljük csak meg, három lehetséges deriváltunk van: $\partial T / \partial x$, $\partial T / \partial y$ és $\partial T / \partial z$. Minthogy háromféle deriváltunk van, és tudjuk, három szám kell ahhoz, hogy egy vektort csináljunk, talán ez a három derivált alkotja egy vektor három komponensét:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \stackrel{?}{=} \text{vektor} \quad (54.11)$$

Természetesen, általában nem igaz, hogy bármely három szám vektort alkot. Ez csak akkor igaz, ha a koordináta-rendszer elforgatásakor a vektor komponensei egymás között a megfelelő módon transzformálódnak. Mutassuk meg, hogy (54.11) valóban vektor; a deriváltak ugyanis valóban a megfelelő módon transzformálódnak, ha a koordináta-rendszert elforgatjuk.

Több módon is beláthatjuk ezt. Az egyik mód a következő: Feltesszünk egy kérdést, amelyre a válasz független a koordináta-rendszertől,

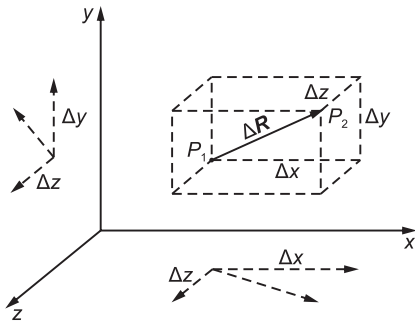
és megpróbáljuk a választ „invariáns formában” megfogalmazni. Például, ha $S = \mathbf{A}\mathbf{B}$, ahol \mathbf{A} és \mathbf{B} vektorok, tudjuk – mivel a 11. fejezetben bebizonyítottuk –, hogy S skalár. Tudjuk, hogy S skalár, anélkül, hogy megnéznénk, változik-e a koordináta-rendszer megváltozásával. Nem változhat, mivel két vektor skaláris szorzata. Hasonlóképpen, ha van három számunk, $(B_1, B_2$ és $B_3)$, és bármely \mathbf{A} vektorra az

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S \quad (54.12)$$

összeg bármely koordináta-rendszerben ugyanaz, akkor B_1, B_2 és B_3 szükségképpen valamely \mathbf{B} vektor három komponense.

Gondoljunk most egy hőmérsékletterre. Vegyük fel ebben a térben a P_1 és P_2 pontot úgy, hogy a közöttük levő $\Delta\mathbf{R}$ helyvektor hossza, a távolságuk nagyon kicsiny legyen. Ha a P_1 pontban a hőmérséklet T_1 , a P_2 pontban pedig T_2 , akkor a két pont közötti hőmérséklet-különbség $\Delta T = T_2 - T_1$. Ezekben a valóságos, fizikai pontokban a hőmérsékletértékek bizonyosan nem függenek attól, hogy milyen tengelyeket választunk a koordináták mérésére. Vagyis, ΔT a koordináta-rendszerrel független szám: skalár.

Ha valamilyen alkalmas koordináta-rendszert választunk, írhatjuk: $T_1 = T(x, y, z)$ és $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, ahol $\Delta x, \Delta y$ és Δz a $\Delta\mathbf{R}$ vektor komponensei (54.5. ábra). Visszaemlékezve az (54.7) egyenletre,



54.5. ábra. A $\Delta\mathbf{R}$ vektor, amelynek a komponensei $\Delta x, \Delta y$ és Δz

felírhatjuk:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z. \quad (54.13)$$

Az (54.13) egyenlet bal oldala skalár. A jobb oldal három szorzat összege, amelyekben $\Delta x, \Delta y$ és Δz egy vektor komponensei. Következésképpen

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

szintén egy vektor három komponense. Ezt az új vektort a ∇T szimbólummal jelöljük. A ∇ szimbólumról (nablának hívják), amely egy feje tetejére

állított Δ , föltesszük, hogy emlékeztet bennünket a deriválásra. A ∇T -t különböző módon szokás olvasni: „nabla T ” vagy „gradiens T ”;

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (54.14)$$

Ezt a jelölést használva, az (54.13) egyenletet tömörebb alakban is írhatjuk:¹

$$\Delta T = \nabla T \Delta \mathbf{R}. \quad (54.15)$$

Szóval ez az egyenlőség kimondja: két közeli pont közötti hőmérsékletkülönbség egyenlő T gradiensének és a távolságvektornak a szorzatával. Az (54.15) egyenlőség alakilag is világosan szemlélteti bizonyításunkat, ami szerint ∇T valóban vektor.

Talán mindez még nem győzte meg teljesen az Olvasót? Bizonyítsunk most egy más módon is. (Bár, ha alaposabban szemügyre veszi, láthatja majd, hogy ez valójában ugyanaz a bizonyítás, kissé hosszabb lére eresztve!) Meg fogjuk mutatni, hogy ∇T komponensei ugyanolyan módon transzformálódnak, mint \mathbf{R} komponensei. Ha pedig így van, akkor ∇T valóban vektor, a 11. fejezetben adott eredeti definíciónk szerint. Válasszunk új koordináta-rendszert: x', y', z' , és határozzuk meg ebben a koordináta-rendszerben a $\partial T / \partial x'$; $\partial T / \partial y'$; $\partial T / \partial z'$ deriváltakat. Egy kicsit egyszerűbbé tehetjük a dolgot, ha feltételezzük hogy $z = z'$, s így meg is feledkezhetünk a z koordinátáról. (Az általános esetet az Olvasó maga is ellenőrizheti.)

A választott x', y' koordináta-rendszer ϑ szöggel van elforgatva az x, y rendszerhez képest (54.6a ábra). Egy (x, y) pont koordinátái a vesszős rendszerben:

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \quad (54.16)$$

$$y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \quad (54.17)$$

vagy pedig x -re és y -ra megoldva:

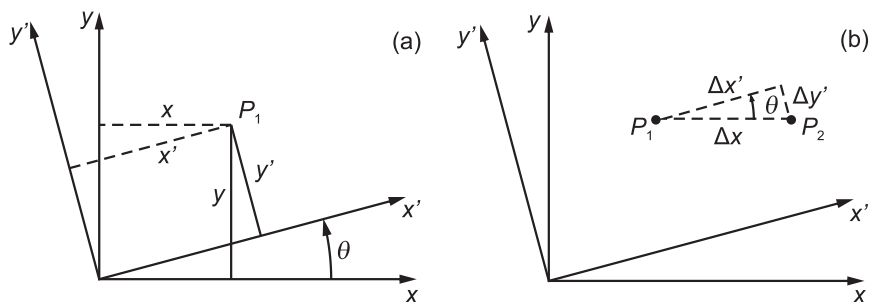
$$x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta \quad (54.18)$$

$$y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta. \quad (54.19)$$

Ha bármely számpár ugyanúgy transzformálódik ezek szerint az egyenletek szerint, mint x és y , akkor a két szám vektort alkot.

¹Jelölésünkben az (a, b, c) kifejezés olyan vektort jelent, amelynek három komponense a, b és c . Ha szeretjük használni az \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} egységvektorokat, akkor (54.14) a következő alakban írható:

$$\nabla T = \mathbf{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial z}.$$



54.6. ábra. (a) Transzformáció elforgatott koordináta-rendszerbe. (b) Az x -tengellyel párhuzamos $\Delta \mathbf{R}$ intervallum speciális esete

Most vizsgáljuk meg a két, egymáshoz közel fekvő P_1 és P_2 pont közötti hőmérséklet-különbséget (54.6b ábra). Ha x -szel és y -nal számolunk, akkor

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x, \quad (54.20)$$

mivel $\Delta y = 0$.

Mi lenne a vesszős rendszerben végzett számítás eredménye? Itt azt írhatnánk:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y'. \quad (54.21)$$

Az 54.6b ábrából kitűnik, hogy

$$\Delta x' = \Delta x \cos \vartheta \quad (54.22)$$

és

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \vartheta, \quad (54.23)$$

mert $\Delta y'$ negatív, ha Δx pozitív. Ezeket behelyettesítve az (54.21) egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \vartheta = \quad (54.24)$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta \right) \Delta x. \quad (54.25)$$

Összehasonlítva az (54.25) és (54.20) egyenletet, látjuk, hogy

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (54.26)$$

Ez az egyenlet az mondja, hogy $\partial T / \partial x$ -et ugyanúgy kapjuk $\partial T / \partial x'$ -ből és $\partial T / \partial y'$ -ből, mint ahogyan x -et kapjuk x' és y' -ből. Tehát $\partial T / \partial x$ egy vektor x irányú komponense. Hasonló okoskodással megmutathatnánk, hogy $\partial T / \partial y$ és $\partial T / \partial z$ az y és a z irányú komponensek. ∇T tehát határozottan vektor; mégpedig a T skalártérből származtatott vektor.

54.4. A ∇ operátor

Most pedig olyasvalamit művelünk, ami nagyon szórakoztató és szellemes, és jellegzetesen azok közé a dolgok közé tartozik, amelyek a matematikát széppé teszik. Annak a bizonyítása, hogy $\text{grad}T$ vagy ∇T vektor, nem függött attól, hogy *milyen* skalárteret differenciáltunk, mert ha T -t *bármilyen* skalártérrel helyettesítenénk, az összes bizonyítások ugyanazok maradnának. Ugyanis a transzformációs egyenletek sem változnak, bármit is differenciálunk; ezért akár el is hagyhatnánk a T -t, és (54.26)-ot operátoregyenlettel helyettesíthetnénk:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (54.27)$$

Ahogyan Jeans mondta, az operátort „differenciálásra éhesen hagyjuk”.

Mivel a differenciáloperátorok úgy transzformálódnak, mint egy vektor komponensei, hívhatjuk őket egy *vektoroperátor* komponenseinek is. Írhatjuk:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (54.28)$$

ami természetesen azt jelenti, hogy

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (54.29)$$

Vagyis elvonatkoztattuk a gradienst a T -től – ez hát a csodálatos ötlet!

Persze, nem szabad szem elől téveszteniünk, hogy ∇ operátor. Magában semmit sem jelent. Ha pedig ∇ magában semmit sem jelent, mit jelent az, ha megszorozzuk előlről egy skalárral, mondjuk, T -vel? Ekkor a $T\nabla$ szorzatot kapjuk? (Egy vektort mindig meg lehet szorozni egy skalárral.) Ez még mindig nem jelent semmit, valamint az x irányú komponense,

$$T \frac{\partial}{\partial x} \quad (54.30)$$

sem szám, hanem szintén valamilyen fajta operátor. Azonban a vektoralgebrával összhangban $T\nabla$ -t még vektornak tekinthetnénk.

Szorozzuk meg most a ∇ -t hátulról egy skalárral, ekkor a (∇T) szorzatot kapjuk. A közönséges algebrában

$$T\mathbf{A} = \mathbf{A}T, \quad (54.31)$$

de nem szabad elfelejtenünk, hogy az operátoralgebra egy kicsit különbözik a közönséges algebrától. Operátorokkal mindig be kell tartanunk a helyes sorrendet úgy, hogy az operációknak megfelelő értelmük legyen. Semmi nehézségünk sem lesz, ha emlékezetünkben tartjuk, hogy a ∇ operátor ugyanolyan szabályoknak van alávetve, mint a derivált jelölés. Amit differenciálnunk kell, az a ∇ jobb oldalára kerül. A sorrend fontos.

Ha a sorrend fontosságát szem előtt tartjuk, akkor belátjuk, hogy $T\nabla$ operátor, de a ∇T szorzat többé már nem „éhes” operátor – teljesen kielégítettük. Ez valóban fizikai vektor, amelynek van értelme: T térbeli változásának sebességét jelenti. ∇T -nek az x komponense azt mutatja, hogy milyen *gyorsan* változik T az x irányban. Milyen irányú a ∇T vektor? Tudjuk, hogy T -nek tetszőleges irányban vett változási sebessége nem más, mint ∇T -nek abba az irányba mutató komponense [lásd (54.15) egyenlet]. Következésképpen ∇T iránya az, amelyre a legnagyobb a vetülete, vagyis amelyik irányban a leggyorsabban változik. T gradiense a (T szerinti) lejtő legmeredekebb irányában felfelé mutat.

54.5. Műveletek ∇ -val

Végezhetünk-e a ∇ vektoroperátorral más algebrai műveleteket is? Két vektorral képezhetünk skaláris szorzatot is. Elkészíthetjük-e a

$$(\text{vektor}) \cdot \nabla \text{ vagy } \nabla \cdot (\text{vektor})$$

szorzatokat? Az elsőnek így nincs értelme, mivel ez még csak operátor. Végül is az, hogy mit jelent, attól függ, hogy mire hat a ∇ . A második szorzat pedig skalártér (\mathbf{AB} mindig skalár.)

Nézzük meg a ∇ -nak egy ismert \mathbf{h} vektortérrel képezett skaláris szorzatát. Kíírjuk a komponenseket:

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \quad (54.32)$$

vagy

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}. \quad (54.33)$$

Ez az összeg invariáns a koordináta-transzformációval szemben. Ha másik koordináta-rendszert választanánk (vesszővel jelölve), azt kapnánk, hogy²

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'}, \quad (54.34)$$

s ez *ugyanaz* a szám, mint amit az (54.33) egyenletből kapnánk, bár egészen más az alakja. Azaz

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot \mathbf{h} \quad (54.35)$$

a tér bármely pontjára. Tehát $\nabla \cdot \mathbf{h}$ skalártér, amely szükségképpen valamilyen fizikai mennyiséget jelent. Vegyük észre, hogy $\nabla \cdot \mathbf{h}$ -ban a deriváltak kombinációja meglehetősen speciális. Mindenféle más kombináció

² \mathbf{h} -t úgy képzeljük el, mint egy fizikai mennyiséget, amely a térbeli helyzettől függ, és nem úgy, mint egy háromváltozós matematikai függvényt. Ha \mathbf{h} -t „deriváljuk” x, y és z vagy x', y' és z' szerint, akkor először \mathbf{h} matematikai alakját a három megfelelő változó segítségével fel kell írni.

is lehetséges, mint például $\partial h_y / \partial x$, amely sem nem skalár-, sem nem vektorkomponens.

A $\nabla \cdot$ (*vektor*) skalármennyiség rendkívül fontos a fizikában: a neve *divergencia*. Például,

$$\nabla \mathbf{h} = \operatorname{div} \mathbf{h} = \mathbf{h} \text{ „divergenciája”}. \quad (54.36)$$

Amint a ∇T esetében tettük, $\nabla \cdot \mathbf{h}$ -nak is tulajdoníthatunk fizikai jelentést, de erről majd később beszélünk.

Először lássuk, hogy mit kezdhetünk még a ∇ vektoroperátorral. Mit jelent a vektorszorzat? Azt kell várnunk, hogy

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{vektor}. \quad (54.37)$$

Valóban vektor, amelynek komponenseit a vektoriális szorzatokra vonatkozó szokásos szabályok szerint írhatjuk fel [lásd az (54.2) egyenletet]:

$$(\nabla \times \mathbf{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}. \quad (54.38)$$

Hasonlóképpen

$$(\nabla \times \mathbf{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z}. \quad (54.39)$$

és

$$(\nabla \times \mathbf{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}. \quad (54.40)$$

A $\nabla \times \mathbf{h}$ kombinációt „*h rotációjának*” hívjuk. Hogy miért éppen így hívjuk és mi a jelentése ennek a kombinációnak, arra később visszatérünk.

Összefoglalva, háromféle kifejezést tudunk készíteni ∇ -val:

$$\nabla T = \operatorname{grad} T = \text{vektor}$$

$$\nabla \mathbf{h} = \operatorname{div} \mathbf{h} = \text{skalár}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \operatorname{rot} \mathbf{h} = \text{vektor}$$

Ezeket a kombinációkat felhasználva, kényelmesen leírhatjuk a háromdimenziós terek változásait, olyan módon, amely abban az értelemben általános, hogy nem függ a koordinátatengelyek speciális megválasztásától.

Egy példán mutatjuk be a ∇ vektor-differenciáloperátor használatát, felírunk egy vektoregyenletrendszert, amely az elektromágnesességnek ugyanazokat a törvényeit tartalmazza, mint amelyeket az 53. fejezetben már szavakkal elmondtunk:

A Maxwell-egyenletek

$$(1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$(2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(3) \quad \nabla \mathbf{B} = 0 \quad (54.41)$$

$$(4) \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0},$$

ahol ρ az *elektromos töltéssűrűség*, vagyis az egységnyi térfogatban található töltésmennyiség, és \mathbf{j} az *elektromos áramsűrűség*, azaz a felületegységen másodpercenként átfolyó töltésmennyiség. Ez a négy egyenlet tartalmazza az elektromágneses tér teljes klasszikus elméletét. Új jelölésünk révén milyen elegánsan egyszerű alakot kaptunk!

54.6. A hővezetés differenciálegyenlete

Példaként egy másik fizikai törvényt is írjunk fel vektorjelöléssel. A törvény nem egészen pontos ugyan, de sok fémre és számos más hővezető anyagra is egész jól teljesül. Mint ismeretes, ha egy lemez egyik oldalát T_2 hőmérsékletre hevítjük, a másik oldalát pedig T_1 hőmérsékletre hűtjük, akkor a lemezen keresztül hő áramlik T_2 felől T_1 -hez (54.7a ábra). Az átáramló hőmennyiség arányos a lemez A felületével és a hőmérsékletkülönbséggel, továbbá fordítva arányos d -vel, a felületek egymástól való távolságával. (Adott hőmérséklet-különbség esetén annál nagyobb a hőáram, minél vékonyabb a lemez.) Ha J -vel jelöljük az egységnyi idő alatt a lemezen átáramló hőenergiát, akkor:

$$J = \lambda(T_2 - T_1) \frac{A}{d}. \quad (54.42)$$

A λ (lambda) arányossági tényezőt *hővezetési együtthatónak* nevezzük.

Mi történik bonyolultabb esetben? Mondjuk, egy szeszélyes alakú testben, amelyben a hőmérséklet valamilyen különleges módon változik. Vizsgáljuk a test egy piciny darabját, és képzeljünk el egy miniatűr méretű réteget (54.7a ábra). A réteg határait az izotermális felületek mentén válasszuk (54.7b ábra) úgy, hogy az (54.42) egyenlet teljesüljön erre a kis rétegre.

Ha a kis rétegdarab felülete ΔA , az egységnyi időre eső hőáram:

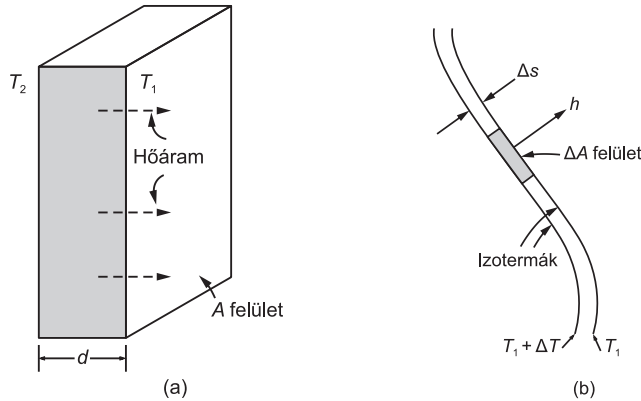
$$\Delta J = \lambda \Delta T \frac{\Delta A}{\Delta s}, \quad (54.43)$$

ahol Δs a réteg vastagsága. Mármost $\Delta J / \Delta A$ -t korábban úgy határoztuk meg, mint a \mathbf{h} abszolút értékét, és \mathbf{h} a hőáram irányába mutat. A hőáram $T_1 + \Delta T$ felől T_1 felé folyik, és merőleges az izotermákra, amint azt az 54.7b ábra mutatja. Továbbá, $\Delta T / \Delta s$ éppen megadja, hogy milyen gyorsan változik T a hely függvényében. És mivel az elmozdulás merőleges az izotermákra, a mi $\Delta T / \Delta s$ hányadosunk a maximális mértékű változást adja, ezért éppen egyenlő ∇T abszolút értékével. Mármost, mivel ∇T irá-

nya \mathbf{h} irányával ellentétes, (54.43)-at vektoregyenlet alakjában írhatjuk:

$$\mathbf{h} = -\lambda \nabla T. \quad (54.44)$$

(A negatív előjel azért szükséges, mert a hőenergia a hőmérséklet csök-



54.7. ábra. (a) Lemezen átfolyó hőáram. (b) Infinitézimális réteg, amely párhuzamos egy kiterjedt testben levő izoterma-felületekkel

kenésének az irányában, mintegy a „lejtőn lefelé” folyik.) (54.44) kiterjedt testekre írja le a hővezetés differenciálegyenletét. Látható, hogy ez igazi vektoregyenlet. Mindkét oldal vektor, ha λ csupán egy szám. Ez az egyenlet tetszőleges alakú testekre érvényes, tehát általánosítása a téglalakú testekre vonatkozó (54.42) egyenletnek. Később megtanuljuk majd, hogyan lehet felírni az összes, (54.42)-höz hasonló elemi fizikai összefüggést a kifinomultabb vektorjelöléssel. Újfajta jelölésünk azonban nemcsak azért lesz hasznos, mert az egyenleteket egyszerűbb alakúaknak mutatja, de nagyon világosan látszik az egyenletek fizikai tartalma is, anélkül, hogy bármely speciálisan választott koordináta-rendszerre hivatkoznunk kellene.

54.7. Vektorterek második deriváltjai

Eddig csak első deriváltjaink voltak, miért ne lennének második deriváltak is? Több kombinációt képezhetünk:

- (a) $\nabla \cdot (\nabla T)$
- (b) $\nabla \times (\nabla T)$
- (c) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$
- (d) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h})$
- (e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h})$

(54.45)

Az Olvasó maga ellenőrizheti, hogy mindezek a kombinációk lehetségesek.

Nézzük meg először a másodikat, (b)-t. Ez ugyanolyan alakú, mint

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A}T) = (\mathbf{A} \times \mathbf{A}T) = 0,$$

mivel $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ mindig nulla. Így azt várjuk, hogy

$$\text{rot}(\text{grad}T) = \nabla \times (\nabla T) = 0. \quad (54.46)$$

Könnyen belátható, hogy ez az egyenlet miként „jön ki”, ha végigszámoljuk a komponenseket:

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x(\nabla T)_y - \nabla_y(\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (54.47)$$

ami az (54.8) egyenlet értelmében nulla. Hasonló módon kimutatható, hogy a másik két komponens is nulla. Tehát $\nabla \times (\nabla T) = 0$ bármely hőmérséklet-eloszlásra, tulajdonképpen *bármely* skalárfüggvényre.

Most vizsgáljuk meg, hogy a felsorolt kombinációk között találunk-e még egy nullát! Egy vektor skaláris szorzata egy olyan vektoriális szorzattal, amelyik ugyanezt a vektort tartalmazza, egyenlő nullával:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (54.48)$$

Ugyanis $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ merőleges \mathbf{A} -ra, és így \mathbf{A} irányára eső vetülete nulla. Ugyanez a kombináció jelenik meg (54.45) (d) egyenletében, így

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = \text{div}(\text{rot} \mathbf{h}) = 0. \quad (54.49)$$

Ezt ugyanolyan könnyű belátni, mint az előbbi esetet, ha a számolást a komponensekkel végezzük el.

S most kimondunk két matematikai tételt, de ezeket nem bizonyítjuk be. Mindkettő nagyon érdekes és nagyon hasznos is a fizikus számára.

Sok fizikai problémánál előfordul, hogy valamely mennyiségnek, mondjuk, az \mathbf{A} vektortérnek a rotációja nulla. Az előbb láttuk ((54.46) egyenlet), hogy a gradiens rotációja nulla, amit könnyű megjegyezni, csak a vektorokra kell gondolnunk. Mindenesetre lehetséges, hogy \mathbf{A} valamely mennyiség gradiense, de ez esetben a rotációja szükségképpen nulla. Az érdekes tétel éppen azt mondja ki, ha \mathbf{A} rotációja nulla, akkor \mathbf{A} *mindig valaminek a gradiense*, azaz létezik olyan ψ skalártér, amelyre igaz, hogy \mathbf{A} egyenlő ψ gradiensével. Szavakkal kifejezve:

TÉTEL: Ha $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, akkor létezik olyan ψ , amelyre igaz, hogy

$$\mathbf{A} = \nabla \psi. \quad (54.50)$$

Hasonló tétel igaz abban az esetben is, amikor \mathbf{A} divergenciája nulla. Láttuk az (54.49) egyenletben, hogy valami rotációjának a divergenciája mindig nulla. Ha találunk egy \mathbf{D} vektorteret, amelyre $\operatorname{div} \mathbf{D}$ nulla, akkor levonhatjuk azt a következtetést, hogy \mathbf{D} valamilyen \mathbf{C} vektortérnek a rotációja.

TÉTEL: Ha $\nabla \mathbf{D} = 0$, akkor létezik olyan \mathbf{C} , amelyre igaz, hogy

$$\mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{C}. \quad (54.51)$$

Amikor áttekintettük a két ∇ operátort tartalmazó lehetséges kombinációkat, azt találtuk, közülük kettő mindig nulla. Most nézzük meg azokat, amelyek *nem* nullák. Vegyük a $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{T})$ kombinációt, amelyik az első volt a listánkon. Írjuk ki a komponenseket:

$$\nabla T = \mathbf{i}\nabla_x T + \mathbf{j}\nabla_y T + \mathbf{k}\nabla_z T.$$

Így

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) &= \nabla_x(\nabla_x T) + \nabla_y(\nabla_y T) + \nabla_z(\nabla_z T) = \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (54.52)$$

Ez általában valamilyen szám, tehát skalártérrel van dolgunk.

Láthatjuk, egyáltalán nem kell ragaszkodnunk a zárójelekhez, tehát a kétértelműség veszélye nélkül írhatjuk:

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla)T = \nabla^2 T. \quad (54.53)$$

∇^2 -et úgy tekintjük, mint egy új operátort, mégpedig skalároperátort.

Mivel gyakran szerepel a fizikában, külön neve is van:

$$\text{Laplace-operátor} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (54.54)$$

Mivel a Laplace-operátor skalár, hathatunk vele egy vektorra is, amin azt értjük, hogy ugyanazt az operációt elvégezzük mindegyik, a derékszögű koordináta-rendszerben vett komponensen:

$$\nabla^2 \mathbf{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z).$$

Vizsgáljunk most még egy lehetséges esetet: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) - t$, az (54.45) egyenletcsoportban az (e) jelűt. Nos, a rotáció rotációja az (54.6) vektor-egyenlet felhasználásával másképp is írható:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (54.55)$$

Hogy ezt a formulát felhasználhassuk, helyettesítsük az \mathbf{A} -t és a \mathbf{B} -t a ∇ operátorral, és legyen $\mathbf{C} = \mathbf{h}$. A következőt kapjuk:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ???$$

Álljunk csak meg! Valami baj van. Az első két tag teljesen „tisztességes” vektor (az operátorok ki vannak elégítve), de az utolsó tagból értelmetlenség lett. Még mindig operátor. Az a baj, hogy nem vigyáztunk eléggé a tényezők helyes sorrendjének betartására. De ha jobban megnézzük az (54.55) egyenletet, látjuk, hogy az nyugodtan felírható a következő alakban is:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (54.56)$$

Így már jobbnak tűnik a tényezők sorrendje. Végezzük el most a helyettesítést az (54.56) egyenletben. A

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{h} \quad (54.57)$$

egyenlőséget kapjuk. Ez a formula helyesnek tűnik. Valóban az is, amint az a komponensek kiszámításával igazolható. Az utolsó tag a Laplace-operátor, ezért azt is írhatnánk, hogy

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}. \quad (54.58)$$

A kettős ∇ -kombinációról készített lista minden soráról volt valami mondanivalónk, kivéve a (c)-t, a $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$ -t. Ez is egy lehetséges vektortér, de semmi különös nem kell elmondani róla. Egyszerűen egy vektortér, amelyik alkalomadtán előfordulhat.

Célszerű lesz, ha a végeredményeket táblázatban foglaljuk össze:

- (a) $\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = \text{skalártér}$
 - (b) $\nabla \times (\nabla T) = 0$
 - (c) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = \text{vektortér}$
 - (d) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0$
 - (e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}$
 - (f) $(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h} = \text{vektortér}$
- (54.59)

Olvasóinknak talán feltűnt, hogy meg sem próbáltunk ilyen új vektoroperátort csinálni: $(\nabla \times \nabla)$. Vajon miért nem?

54.8. Buktatók

Közönséges vektoralgebrai ismereteinket alkalmaztuk a ∇ operátor algebrájára. Óvatosnak kell azonban lennünk, mert tévedni is lehet. Két buktatót is megemlítünk, bár ebben a könyvben másutt nem fogunk velük találkozni. Mit szólna Olvasónk a következő kifejezéshez, amely két skalárfüggvényt, ψ -t és φ -t tartalmaz:

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\varphi)?$$

Azt mondhatná: nullának kell lennie, hiszen éppen olyan, mint

$$(\mathbf{A}a) \times (\mathbf{A}b),$$

ez pedig nulla, mivel két egyirányú vektor vektoriális szorzata. Tehát $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ mindig nulla. De a mi példánkban a két ∇ operátor nem azonos! Az első az egyik függvényre, a ψ -re hat, a másik pedig egy ettől különböző függvényre, a φ -ra. Így, bár azonos szimbólummal jelöltük őket, mégis különböző operátoroknak kell őket tekinteni. Világos, hogy a $\nabla\psi$ iránya a ψ függvénytől függ, és nem valószínű, hogy párhuzamos a $\nabla\varphi$ -vel.

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\varphi) \neq 0 \quad (\text{általában}).$$

Szerencsére nem lesz szükségünk arra, hogy ilyen kifejezéseket használjunk. (S amit mondtunk, az nem változtat azon a tényen, hogy tetszőleges skalártérre $\nabla \times \nabla\psi = 0$, mivel itt mindkét ∇ ugyanarra a függvényre hat.)

A második számú buktató (amitől megint csak nem kell tartanunk e könyv anyagának tanulmányozása során) a következő: Az itt vázolt szabályok csak akkor egyszerűek és kényelmesek, ha derékszögű koordináta-rendszert használunk. Például, ha $\nabla^2\mathbf{h}$ -val van dolgunk, és az x komponensét akarjuk tudni,

$$(\nabla^2\mathbf{h}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h_x = \nabla^2 h_x. \quad (54.60)$$

Ugyanez a kifejezés *egyáltalán nem használható*, ha $\nabla^2\mathbf{h}$ radiális komponensére vagyunk kíváncsiak. $\nabla^2\mathbf{h}$ radiális komponense nem egyenlő $\nabla^2 h_r$ -rel. Ennek az az oka, hogy a vektoralgebrában a vektorok iránya mindig határozott. De ha vektorterekkel foglalkozunk, különböző helyeken különböző lesz a vektorok iránya is. Ha megpróbálunk egy vektorteret leírni, mondjuk, polárkoordinátákkal, pontról pontra változik az is, hogy mit nevezünk „radiális” iránynak. Így kellemetlen bonyodalmakba keveredünk,

amikor megpróbáljuk deriválni a komponenseket. Például még egy *konstans* vektortérnek is pontról pontra változik a radiális komponense.

Rendszerint biztonságosabb s egyszerűbb is a derékszögű koordinátákhoz ragaszkodva elkerülni a bonyodalmakat, de egy kivételt érdemes megemlíteni: Mivel a Laplace-operátor, ∇^2 skalár, felírhatjuk bármely koordináta-rendszerben, amelyikben csak tetszik (például polárkoordináta-rendszerben). De mivel differenciáloperátor, csupán olyan vektorokra hatunk vele, amelyeknek komponensei rögzített irányokba mutatnak, azaz derékszögű koordináták. Így minden vektorterünket x, y és z komponenseivel fejezzük ki, ha a vektor-differenciálegyenleteinket komponensekben írjuk fel.

Vektor-integrálszámítás

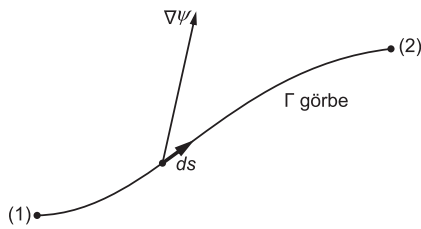
55.1. Vektorintegrálok; $\nabla\psi$ vonalintegrálja

Az 54. fejezetben megtárgyaltuk, hogy különböző módokon képezhetjük a terek deriváltjait, és néha vektorterek, néha skalárterek adódnak. Bár sok különböző képletet dolgoztunk ki, egyetlen szabályban lehet összefoglalni mindent, amiről az 54. fejezetben szó volt, nevezetesen: a $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ operátorok a ∇ vektoroperátor három komponensét alkotják. A következőkben szeretnénk olyan magyarázatot kapni a terek deriváltjairól, hogy azután jobban érzékeljük, mit is jelent valamely vektortér egyenlete.

Már beszéltünk a gradiensoperáció jelentéséről (∇ hat egy skalárra), most értelmezzük sorra a divergenciát és a rotációt. Ezeket a mennyiségeket legjobban bizonyos vektorintegrálokkal és a rájuk vonatkozó egyenletekkel mutathatjuk be. Az egyenleteket, sajnos, nem lehet a vektoralgebrából egyszerű helyettesítéssel megkapni, úgyhogy ezeket az Olvasónak most újdonságként meg kell tanulnia. Az integrálformulák közül az egyik gyakorlatilag magától értetődő, de a másik kettő nem az. Ezeket levezetjük, és megmagyarázzuk a bennük foglaltakat. A tanulmányozandó egyenletek valójában matematikai tételek. Nemcsak a divergencia és a rotáció tartalmának és jelentésének bemutatására hasznosak, hanem az általános fizikai elméletek kidolgozásakor is. E matematikai tételek oly jelentősek a térelméletben, akár az energiamegmaradás tétele a részecskék mechanikájában. Az ilyen általános tételek nagyban hozzásegítenek a fizikai összefüggések mélyebb megértéséhez. El kell ismernünk azonban, hogy – kivéve a legegyszerűbb eseteket – a problémák megoldásakor nem túl hasznosak. Örvendetes persze, hogy tárgyunk bevezetőjében sok egyszerű probléma kerül szőnyegre, amelyek jól megoldhatók a három integrálformulával. Látni fogjuk azonban, hogy ha a feladatok nehezednek, az egyszerű módszerek egyre kevésbé használhatók.

Először foglalkozunk a gradienst tartalmazó integrálformulával. Az összefüggés alap gondolata nagyon egyszerű: A gradiens egy térmennyiség változásának nagysága, s ha ezt integráljuk, megkapjuk a teljes megváltozást. Tegyük fel, hogy $\psi(x, y, z)$ egy skalártér. Két tetszőleges pontban, legyenek ezek (1) és (2), a ψ függvény értéke legyen rendre $\psi(1)$ és $\psi(2)$. [Kényelmes a jelölés, mert $\psi(2)$ jelenti az (x_2, y_2, z_2) pontot, ezért $\psi(2)$

ugyanazt jelenti, mint a $\psi(x_2, y_2, z_2)$.] Ha az (1) és (2) pontot összekötjük a Γ tetszőleges görbével (55.1. ábra), akkor igaz a következő összefüggés:



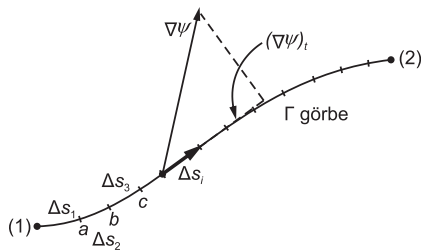
55.1. ábra. Az (55.1) egyenletben szereplő mennyiségek. A $\nabla\psi$ vektort a ds vonalelemnél számítottuk ki

1. TÉTEL:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\Gamma \text{ mentén}}^{(2)} (\nabla\psi) \cdot ds. \quad (55.1)$$

Ez az integrál a $\nabla\psi$ és a ds -vektorok skaláris szorzatának *vonalin-* *tegrálja* a Γ görbe mentén (1)-től (2)-ig, és ds a Γ görbe infinitezimális vonaleleme [(1)-től (2) felé irányítva].

Először fogalmazzuk meg, mit értünk vonalintegrálon. Ha $f(x, y, z)$ skalárfüggvény és az (1), (2) pontot összekötő Γ görbén bejelölünk pontokat és ezeket a pontokat egyenes szakaszokkal összekötjük (55.2. ábra) –



55.2. ábra. A vonalintegrál egy összeg határértéke

az i -edik szakasz hossza Δs_i , ahol az i index értéke $1, 2, 3, \dots$, akkor az

$$\int_{\Gamma \text{ mentén}}^{(2)} f ds$$

vonalintegrálon a

$$\sum_{i=1}^n f_i \Delta s_i$$

határértékét értjük, ahol f_i a függvény értéke az i -edik szakasz valamely pontjában. A határérték az, amihez az összeg tart, ha egyre több szakaszt adunk össze (értelemszerűen úgy, hogy a legnagyobb $\Delta s_i \rightarrow 0$).

Tételünkben, az (55.1) egyenletben az integrál ugyanezt jelenti, bár kissé más alakú. f helyett egy másik skalár szerepel: a $\nabla\psi$ vektor Δs irányú összetevője. Ha $(\nabla\psi)_t$ -vel jelöljük ezt az érintőleges összetevőt, akkor világos, hogy

$$(\nabla\psi)_t\Delta s = (\nabla\psi) \cdot \Delta\mathbf{s}. \quad (55.2)$$

Az (55.1) integrál ilyen tagok összegét jelenti.

Most nézzük meg, miért igaz az (55.1) egyenlet. Az 54. fejezetben megmutattuk, hogy a $\nabla\psi$ összetevője egy kis $\Delta\mathbf{R}$ elmozdulás irányában éppen ψ megváltozásának mértéke a $\Delta\mathbf{R}$ irányban. Vegyük szemügyre a $\Delta\mathbf{s}$ vonaldarabot az (1) ponttól az a pontig (55.2. ábra). Definíciónk szerint:

$$\Delta\psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1\Delta\mathbf{s}_1, \quad (55.3)$$

és a második vonaldarabra:

$$\psi(b) - \psi(a) = (\nabla\psi)_2\Delta\mathbf{s}_2, \quad (55.4)$$

ahol természetesen $(\nabla\psi)_1$ jelenti a gradiens értékét a $\Delta\mathbf{s}_1$ szakaszra, és $(\nabla\psi)_2$ a gradiens értéke a $\Delta\mathbf{s}_2$ szakaszon. Ha az (55.3) és az (55.4) egyenletet összeadjuk, akkor

$$\psi(b) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta\mathbf{s}_1 + (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta\mathbf{s}_2. \quad (55.5)$$

Látható, hogy ha folytatjuk az ilyen tagok összeadását, a következő eredményt kapjuk:

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum_i (\nabla\psi)_i \cdot \Delta\mathbf{s}_i. \quad (55.6)$$

A bal oldal nem függ attól, hogyan választottuk az intervallumokat, ha (1) és (2) mindig ugyanaz marad, ezért vehetjük a jobb oldal határértékét. Ezzel bebizonyítottuk az (55.1) egyenletet.

A bizonyításból látható, hogy amiként nem függ az egyenlőség attól, hogyan választottuk az a, b, c, \dots pontokat, ugyanúgy nem függ attól sem, hogyan vettük fel az (1) és (2) pontot összekötő Γ görbét. Tételünk tehát az (1) és (2) pontot összekötő *tetszőleges* görbére érvényes.

Egy megjegyzés a jelöléshez: belátható, hogy semmi zavart sem okoz, ha a kényelem kedvéért azt írjuk, hogy

$$(\nabla\psi) \cdot ds = \nabla\psi \cdot ds. \quad (55.7)$$

Ezzel a jelöléssel tételünk a következő:

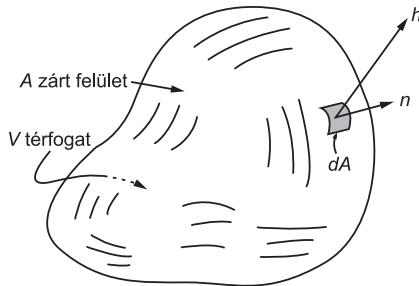
1. TÉTEL:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\psi \cdot ds. \quad (55.8)$$

bármely görbére
(1) és (2) között

55.2. A vektortér fluxusa

Mielőtt rátérnénk a következő – a divergenciára vonatkozó – integráltételre, tanulmányozzunk előbb egy olyan fogalmat, amelynek könnyen értelmezhető fizikai tartalma van a hőáramlás esetében. Már definiáltuk a \mathbf{h} vektort, amely az egységnyi felületen egységnyi idő alatt átáramló hőmennyiséget jelenti. Tegyük fel, hogy az anyagtömb belsejében van egy A zárt felület, amely V térfogatot zár körül (55.3. ábra). Határozzuk meg, mekkora hőmennyiség áramlik ki ebből a térfogatból. Ezt könnyen megtehetjük, ha kiszámítjuk az A felületen áthaladó teljes hőmennyiséget.



55.3. ábra. Az A zárt felület határolja a V térrészt. Az \mathbf{n} egységvektor a dA felületelem kifelé mutató normálisa és \mathbf{h} a hőáramvektor a felületelemen

Jelöljük a felületelemet dA -val. Ez a szimbólum a kétdimenziós differenciál helyett áll. Ha a felület például az xy síkban volna, akkor

$$dA = dx dy$$

lenne. Később térfogati integrálokat is fogunk vizsgálni, ilyenkor infinitezimális térfogatelemnek kicsi kockát célszerű választani, így dV helyett írhatjuk:

$$dV = dx dy dz.$$

Vannak szerzők, akik dA helyett d^2A -t írnak – emlékeztetőül, hogy ez másodrendű mennyiség – és dV helyett d^3V -t. Mi ezt az írásmódot nem használjuk majd, de föltételezzük, nem felejtik el, hogy a felület két-, a térfogat pedig háromdimenziós.

A dA felületelemen átáramló hőmennyiség egyenlő a felület szorozva \mathbf{h} -nak a dA -ra merőleges komponensével. A felületre merőleges, kifelé mutató \mathbf{n} egységvektor felhasználásával, \mathbf{h} -nak a felületre merőleges komponense (55.3. ábra), amire éppen szükségünk van:

$$h_n = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}, \quad (55.9)$$

és így a dA felületelemen áthaladó hőáram:

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (55.10)$$

Ahhoz, hogy megkapjuk a teljes hőáramot, az egyes felületelemeken áthaladó hőáramokat összegeznünk kell. Más szóval: (55.10)-et integrálnunk kell a teljes felületre.

$$\text{Az } A \text{ felületen kifolyó teljes hőáram} = \int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{nd}A. \quad (55.11)$$

Ezt a felületi integrált szokás „ \mathbf{h} felületre vett fluxusának” is nevezni. Eredetileg a fluxus szó áramlást jelent, úgyhogy a felületi integrál éppen \mathbf{h} -nak a felületen való átáramlását jelenti. Ezért úgy okoskodhatunk: \mathbf{h} a hőáramnak az „áramsűrűsége”, és ennek a felületi integrálja a felületen áthaladó teljes, kifelé irányított hőáram, azaz az egységnyi idő alatt áthaladó hőenergia (J/s).

Ezt a fogalmat általánosítani szeretnénk arra az esetre is, amikor a vektor nem valaminek az áramlását jelenti; például lehet elektromos tér is. Természetesen integrálhatjuk – ha akarjuk – az elektromos tér normális komponensét egy felületre. Bár ez nem valaminek az áramlása, mégis „fluxusnak” nevezzük. Azt mondjuk:

$$\mathbf{E} \text{ fluxusa az } A \text{ felületen} = \int_A \mathbf{E} \cdot \mathbf{nd}A. \quad (55.12)$$

Általánosíthatjuk a „fluxus” szót, s most már azt fogja jelenteni: „egy vektor normális komponensének a felületi integrálja”. Ugyanezt a definíciót használhatjuk akkor is, ha a felület nem zárt.

Térjünk vissza a hőáram speciális esetéhez, és vizsgáljuk meg, mi történik, amikor a *hőmennyiség megmarad*. Például képzeljünk el egy anyag-tömböt, amelyben a kezdeti felmelegítés után nem keletkezik hő, és nem is nyelődik el. Ekkor, ha van a felületen keresztül kifelé folyó eredő hőáram, akkor a térfogatban levő hőmennyiségnek csökkennie kell. Olyan körülmények között tehát, amikor a hőmennyiség megmarad,

$$\int_A \mathbf{h} \cdot \mathbf{nd}A = -\frac{dQ}{dt}, \quad (55.13)$$

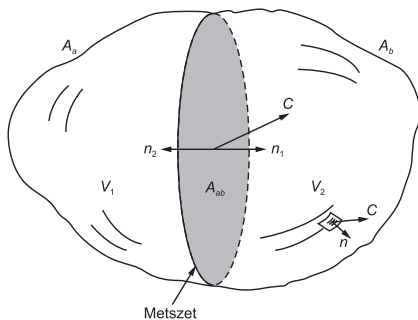
ahol Q a felületen belüli hőmennyiség. Az A felületen kifolyó hőáram egyenlő az A felületen belüli teljes Q hőmennyiség időbeli változási sebességének negatív előjellel vett értékével. Ez az értelmezés azért lehetséges, mert hőáramról beszélünk, és föltételeztük, hogy a hőmennyiség megmarad. Természetesen nem beszélhetnénk az A felületen belüli teljes hőmennyiségről, ha a térfogaton belül hő keletkezne.

Bármely vektor fluxusának van egy érdekes tulajdonsága. Az Olvasó gondolhat itt a hőáram vektorára is, de amit elmondunk, az igaz bármely \mathbf{C} vektortérre. Képzeljünk el egy A zárt felületet, amely V térfogatot

határol. Vágjuk két részre ezt a térfogatot (55.4. ábra). Így két zárt felület és két térfogat keletkezik. A V_1 térfogatot az A_1 felület zárja körül, amely az eredeti felület A_a részéből és az A_{ab} metszetből áll. A V_2 térfogatot az A_2 felület határolja, amely az eredeti felület megmaradt A_b részéből áll és az A_{ab} metszet zárja le. Vizsgáljuk most meg a következő kérdést: Tegyük fel, hogy kiszámítjuk az A_1 felületen áthaladó fluxust, és ehhez hozzáadjuk az A_2 felületen áthaladó fluxust. Megegyezik-e az összeg az eredeti felületen áthaladó fluxussal? A válasz: igen. Az A_1 és A_2 felületek közös A_{ab} részén átmenő fluxusok éppen megsemmisítik egymást. A \mathbf{C} vektor V_1 -ből kiáramló fluxusára írhatjuk:

$$A_1\text{-en áthaladó fluxus} = \int_{A_a} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 dA \quad (55.14)$$

és a V_2 -ből kiáramló fluxusra:



55.4. ábra. A V tartományt, amelyet az A zárt felület határol, két részre osztjuk az A_{ab} „metszettel”. Most két tartományunk van: V_1 , amelyet $A_1 = A_a + A_{ab}$ határol, és a V_2 tartomány, amelyet az $A_2 = A_b + A_{ab}$ határol

$$A_2\text{-n áthaladó fluxus} = \int_{A_b} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 dA. \quad (55.15)$$

Figyeljük meg, hogy a második integrálban \mathbf{n}_1 -gyel van jelölve az A_{ab} kifelé mutató normálisa, amikor az az A_1 -hez tartozik, és \mathbf{n}_2 -vel, amikor az A_2 -höz tartozik (55.4. ábra). Nyilvánvalóan $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, úgyhogy

$$\int_{A_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 dA = - \int_{A_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 dA. \quad (55.16)$$

Ha most összeadjuk az (55.14) és (55.15) egyenletet, láthatjuk, hogy az A_1 -en és A_2 -n áthaladó fluxusok összege éppen megegyezik két integrál összegével, melyek összevonva éppen az eredeti $A = A_a + A_b$ felületre vett fluxust adják.

Látjuk, hogy a teljes külső A felületre vett fluxust úgy tekinthetjük, mint arra a két részre vonatkozó fluxusoknak az összegét, amelyre az eredeti térfogatot felbontottuk. Az osztást tovább is folytathatjuk; például

úgy, hogy a V_1 térfogatrészt ismét kettévágjuk. Szemmel láthatólag most is úgy kell okoskodnunk, mint előbb. *Bárhogyan* osztjuk fel az eredeti térrészt, általában igaz, hogy az eredeti külső felületen átmenő fluxus – ez az eredeti integrál – egyenlő az összes kis belső részre vett fluxus összegével.

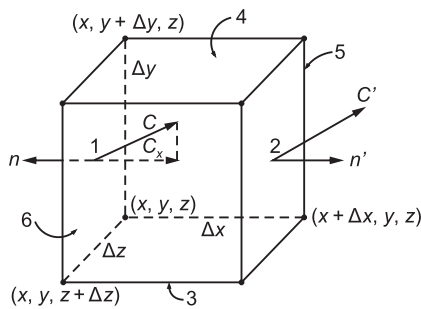
55.3. Kockából kilépő fluxus; Gauss tétele

Speciális esetként vizsgáljunk meg egy kis kockát,¹ érdekes képletet kapunk a belőle kijövő fluxusra. A kocka élei legyenek párhuzamosak a koordinát tengelyekkel (55.5. ábra). Az origóhoz legközelebb eső csúcshoz koordinátái legyenek x, y, z . A kocka élhossza x irányban Δx , y irányban Δy és z irányban Δz . Szeretnénk meghatározni a C vektortérnek a kocka felszínére vett fluxusát. Ezt úgy tudjuk kiszámítani, ha a hat oldallapra vett fluxust összeadjuk. Először nézzük az ábrán 1-gyel jelölt lapot. Erre a fluxus:

$$- \int C_x dy dz.$$

Mivel kicsiny kockáról van szó, ezt az integrált úgy közelíthetjük, ha a lap középpontjában – ezt az (1) pontnak hívjuk – vett C_x értéket megszorozzuk a lap $\Delta y \Delta z$ felületével.

$$\text{Az 1 lapon kiáramló fluxus} = -C_x(1) \Delta y \Delta z.$$



55.5. ábra. A C vektortér egy kis kocka felszínére vonatkozó fluxusának kiszámítása

Hasonlóképpen határozzuk meg a 2 lapon keresztül kiáramló fluxust.

$$\text{A 2 lapon kiáramló fluxus} = C_x(2) \Delta y \Delta z.$$

$C_x(1)$ és $C_x(2)$ általában kicsit különböznek egymástól. Ha Δx elég kicsiny, írhatjuk:

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x.$$

¹A következő fejtegetést teljesen hasonlóan alkalmazhatjuk bármilyen derékszögű hasábra.