KERTÉSZ VI

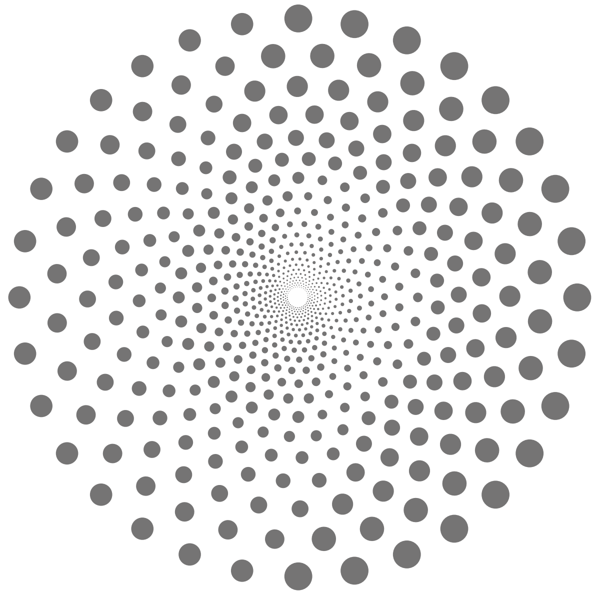
KISZÁ

KERTÉSZ VIKTOR

KISZÁMÍTHATÓ? VÉLETLEN? KÁOSZ?

KERTÉSZ VIKTOR

KISZÁMÍTHATÓ? VÉLETLEN? KÁOSZ?



ad LIBRUM

BUDAPEST, 2022

ISBN 978-615-6439-08-6

info@adlibrum.hu
www.adlibrum.hu
facebook.com/Adlibrum

Az Ad Librum Kft. tagja
a Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének (MKKE)
és a Magyar Könyvkiadók Érdekvédelmi Szövetségének (MKÉSZ).

Főszerkesztő: Pordány Katalin
Felelős szerkesztő: Bíró Csilla
Tördelés: Tímár Tamás
Nyomda: Kapitális Kft.

TARTALOM

„Nekem az tetszik a matematikában, hogy a legbonyolultabb dolgokat is képes egyszerűvé tenni, hogy a matematika lámpásának fényénél sok minden olyan kristálytiszta és világos lesz, ami azelőtt homályos és érthetetlen volt. […] Igen, ez igaz. De ehhez hozzá kell tennem, hogy a matematika néha éppen azt mutatja meg, hogy a látszólag egyszerű valójában milyen bonyolult."

Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról
Harmadik dialógus: A természet könyvének nyelve

„A gondviselés, a sors vagy a szabad akarat irányít oda, ahova végül megérkezünk? Létezik-e egyáltalán véletlen, vagy valójában egy nekünk eleve elrendelt sorsot teljesítünk be?"

Szücs Péter: Dharma
Egy család regényes története a Tiszától a Gangeszig

ELŐSZÓ

Mi ez a könyv? Matematika-tankönyv? Ismeretterjesztés a matematikáról? Nem szándékom egyik sem. A célom az, hogy nem matematikusok számára megmutassam, hogyan bújik meg a matematika a természet, a társadalom, és ha tetszik, a morál jelenségei mögött. A célom, hogy észrevegyük – néha merész asszociációval – az elvont matematikai összefüggéseknek, a matematika szigorú logikájának az alkalmazhatóságát a világban lezajló folyamatokban, és legyen tehetségünk a világ izgalmas eseményei mögött logikus matematikát találni. A világot megpróbálom egységben láttatni: nincs különálló tudomány, irodalom, művészet, matematika. Összhang és harmónia van.

Egy lényeges speciálisabb célom is van. Annak az alapvető kérdésnek a megválaszolása, hogy körülöttünk a világ történései kiszámíthatók-e, vagy sem. A determinizmus szerint a természeti, társadalmi, pszichikai jelenségeket egyértelműen meghatározzák (determinálják) a korábbi események. Ha ismerjük a dolgok, jelenségek közötti oksági összefüggéseket, összefüggés-láncolatokat, akkor ezek a dolgok, jelenségek kiszámíthatók. A determináltsággal ellentétes a véletlen. A káosz ugyan determinált, mégis véletlenszerű jelleget mutat. Sem a véletlen, sem a káosz nem kiszámítható. A mozgás, változás matematikai leírásán keresztül szeretnék némi bepillantást nyújtani e három fogalom izgalmas kapcsolatába.

Mindezt miért? Mert a közölt látásmóddal a világ talán jobban megérthető, és az élet tartalmasabb, izgalmasabb, érdekesebb és szebb lehet.

Ezt a könyvet a szellemi kalandra kész nem matematikusoknak szánom. Nem feltételezek több matematikai képzettséget, mint amit egy jó középiskola nyújt. Legfeljebb erre az alapra építve némely témában kissé továbblépek. Ha az olvasó úgy látná, hogy egy rész túl nehéz a matematikai tartalom miatt (ezek a → és ← közötti részek), akkor ugorja át merészen, később visszatérhet az átugrott részre.

Nem szeretnék matematikáról képletek nélkül írni, de szeretném a túl bonyolult képleteket elkerülni. Nem könnyű megtalálni az optimális középutat. Valószínűleg e könyvben sem sikerült. Ezért nem lehet eléggé hangsúlyozni, hogy szükség esetén alkalmazni kell az „átugrási" technikát. Aki jobb viszonyt ápol a matematikával, vagy felettébb érdeklődő, az rágja át magát a nehezebb, nyilakkal megjelölt részeken!

Sok sikert a szellemi kalandhoz!

1. A *TERMÉSZET KÖNYVE* ÉS A JÖVŐ ELŐREJELZÉSE

Szent Ágoston és a *Természet könyve*

A Hippo nevű város ókori észak-afrikai kikötő és püspöki székhely volt Numidiában, egy római provinciában, ma Annába nevű város Algériában. Itt élt és 395-től haláláig itt volt püspök Szent Ágoston (Aurelius Augustinus, i. sz. 354–430), a legjelentősebb keresztény gondolkodó Szent Pál után. Máig ható tanítása, hogy Isten a Biblia mellett egy második könyvet is írt, a *Természet könyvé*t, amely nem más, mint maga a természet, az Isten teremtette világ. Úgy vélte, Isten üzenete ebből is kiolvasható. E gondolat eredete fellelhető az ógörög filozófusoknál, akik szerint az emberi értelem képes az egységes univerzum felépítését megérteni. Ez a szemlélet előfordul más Szent Ágoston előtti gondolkodóknál is.

Szent Ágoston tanítása jegyében a teológusok mellett megjelentek az orvoslás, a csillagászat, a természetfilozófia és a jog szakértői, vagyis a tudomány emberei. Az egyház és a tudomány még évszázadokig nem vált szét (a teljes szétválás talán csak a 19. században történt meg), de e forradalmi gondolat hatalmas lökést adott az egyes tudományterületek önálló fejlődésének. A „két könyv" metaforája mind a mai napig foglalkoztatja a teológusokat [1.1.].

Galilei és a *Természet könyve*

Galileo Galilei (1564–1642) olasz csillagász és fizikus, akit sokan a modern tudomány atyjaként értékelnek, hitt a Bibliában, de hitt a *Természet könyvé*nek igazában is. *Az aranymérleg* (*Il Saggiatore* [1.2.]) című, 1623-ban Rómában publikált értekezésében az alábbi legendás sorokat írta:

„A filozófia ama hatalmas könyvbe van beírva, amely folytonosan nyitva szemünk előtt (a mindenségre gondolok), de nem lehet megérteni, csak ha megtanulja az ember elébb a nyelvet és megismeri a betűket, amelyen íródott. Matematikai nyelven íródott, és a betűk háromszögek, körök, egyéb geometriai alakzatok. Ezek nélkül a közvetítők nélkül lehetetlen a megértés emberi szavakban; ezek nélkül hiábavaló kerengés egy sötét labirintusban."

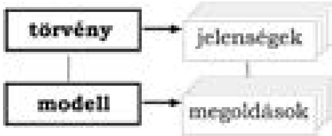
A mozgás matematikai leírása

Minket a mozgás, általánosabban a változás matematikai leírása érdekel. Milyen eredmények születtek e téren Galilei előtt? A görögök – hatalmas tudományos sikereik mellett – meg sem kísérelték a mozgást matematikailag leírni, mert úgy gondolták, hogy ez nem a matematika feladata, sőt ez matematikával nem is lehetséges. Bár ebben a meggyőződésben Arisztotelész (i. e. 384–323) sem volt kivétel, mégis ő állította fel a történelem talán legelső mozgási matematikai modelljét: $v = F/R$, vagyis a v sebesség egyenlő az F mozgató erő és a mozgással szembeni R ellenállás hányadosával. Ez hibás elmélet. Mivel ő sem szándékozott a mozgással foglalkozni, ezért nem ébredt rá a képlet helytelenségére.

A mozgás matematikai leírásával kapcsolatos görög ellenérzés közel 2000 évig, egészen Kopernikuszig bénítólag hatott a fizika fejlődésére. Az áttörést az égitestek mozgásának tanulmányozása hozta. Kopernikusz (1473–1543) lengyel csillagász nevéhez fűződik a heliocentrikus világkép kidolgozása a ptolemaioszi geocentrikus világképpel szemben. A holdak, bolygók, csillagok mozgását tovább tanulmányozta Giordano Bruno (1548–1600) olasz szerzetes, filozófus, matematikus, költő és csillagász, továbbá Johannes Kepler (1571–1630) német matematikus és csillagász, valamint Galilei. Galilei elsőnek próbálkozott a mozgás matematikai leírásával. Tanulmányozta a sebességet, az ingamozgást, a gravitációt, a szabadesést és a hajítást. Kísérletei alapján helytálló képleteket talált a szabadon eső, lejtőn leguruló vagy elhajított tárgy mozgási pályájának meghatározására.

Arisztotelész téves $v = F/R$ képletét azonban csak az angol Isaac Newtonnak (1643–1727) sikerült korrigálni [1.3.]. A helyes modell a róla elnevezett második törvény, a dinamika alaptörvénye: $a = F/m$, vagyis az *a* gyorsulás (a sebesség változási sebessége) egyenlő az *F* mozgató erő és az *m* mozgó tömeg hányadosával.

A newtoni $a = F/m$ modell egy *természeti törvény*t ír le. E törvény következményei a bekövetkező *jelenség*ek, vagyis hogy miképpen esik a szabadon eső test, hogyan gurul le a lejtőn a golyó, vagy milyen pályán halad az elhajított tárgy. Galilei helyesen írta le a jelenségeket, de nem tudta feltárni a törvényt. A *modell* mindig a törvényt írja le, a jelenségeket pedig a *modell megoldásai* adják. Mert mindig több megoldás van, ugyanaz a törvény sokféle jelenséget idézhet elő, lásd az 1.1. ábrát.



1.1. ábra

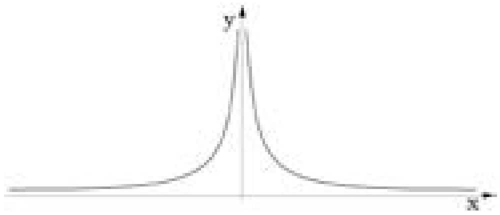
Ha már megemlítettük a Newton nevéhez fűződő dinamikai alaptörvényt és annak helytelen, 2000 évvel korábbi, Arisztotelész által megfogalmazott változatát, egy érdekes tényről is szót kell ejteni, hogy elégtételt adjunk a zseniális Arisztotelésznek a tévedéséért. Ugyanis bizonyos feltételek mellett az arisztotelészi modell is jó közelítést ad [1.4.]. Nevezetesen akkor, ha a szabad mozgást akadályozó ellenállás a v sebességgel arányos, így vR alakban írható. Ilyen a folyadék közegellenállása. De ilyen a légellenállás is kis sebességek esetén. Ekkor az F mozgató erőből kivonódik a vR mozgást fékező erő. Tehát itt az $a = F/m$ helyett az $a = (F-vR)/m$ modell érvényes. A mozgás indulása után, ahogy a sebesség változik, beáll egy állandó sebesség, vagyis az a gyorsulás nullává válik: $a = 0$, tehát $0 = F - vR$, vagyis valóban $v = F/R$.

A matematika „mindenhatósága"; a *Természet könyvé*nek nyelve

Vajon Galilei után négyszáz évvel ma is úgy gondoljuk, hogy a *Természet könyve* a matematika nyelvén íródott?

Három, egymástól független mérés alapján a világegyetem korát ma körülbelül 13,8 milliárd évre tesszük. Pontosabban ez az idő mai tudásunk szerint 13,788 és 13,820 milliárd év között van. Elképesztő pontosság! A kezdet volt az ősrobbanás (a nagy bumm, vagy angolul *The Big Bang*), amelyben a jelenlegi fizikában használatos matematikai modell szerint egy gravitációs szingularitás volt, ahol az idő és tér értelmezhetetlen. Más szóval ekkor *keletkezett* az idő és a tér. Tehát nem volt *előtte.* Csak *azt követően* lett. Az elmélet olyan pontosságú, hogy az ősrobbanás utáni, hihetetlenül kicsiny időtartam, 10^{-35} másodperc történéseire is választ ad. Ez emberi ésszel természetesen felfoghatatlan, de elfogadjuk, és valahogy értelmezzük, amennyiben hitelt adunk a tudománynak. És miért ne adnánk, ha a tudomány nem mesél, kitalál, fantáziál vagy találgat, hanem határozott elméleteket állít fel, amelyeket aztán egymástól független kísérletekkel és pontos mérésekkel több oldalról is alátámaszt. Ha az alátámasztás helyett cáfolat az eredmény, akkor minden vaskalaposságot félretéve elveti az elméletet.

A szingularitás szó a latin *singularis* melléknévből ered, amelynek jelentése páratlan, egyedüli. A szingularitás mai értelmezésben olyasmit jelöl, mint az $1/x^2$ függvény az $x = 0$ helyen (1.2. ábra).



1.2. ábra

Legyen x bármilyen kicsiny, ki tudjuk számítani e tört értékét, és minél közelebb van x a nullához, annál nagyobb ez az érték. De a nulla helyen értelmetlenné válik a kifejezés. Az ősrobbanás vizsgálatában a szingularitás ténye nagyon zavaró körülmény. Megnyugtatóbb lenne egy olyan elmélet, amelyben az ősrobbanás nem szingularitás. Kutatás folyik, hogy felfedezzenek ilyen elméletet. Ez a kvantumgravitációnak nevezett elmélet lenne, amely egységbe foglalná a ma még elkülönülő kvantummechanikát és az általános relativitáselméletet.

Miért érdekesek ezek a dolgok számunkra, és mi köze mindennek a *Természet könyvé*hez? Azért érdekesek, mert valamennyi fizikai elméletet matematikai egyenletekkel, matematikai modellekkel írunk le. Úgy tűnik, maguk a fizikai törvények az ősrobbanáskor keletkeztek és alakultak. Tehát változékonyak. Ezt a változékonyságot a változtathatatlan matematika nyelvén írjuk le. Fel sem merül, hogy az ősrobbanáskor másféle matematika volt érvényben, mint amit ma használunk. A matematika szinte „mindenható” a természettudományokban [1.5.]. Széles körű alkalmazhatósága egyre inkább megmutatkozik a társadalomtudományokban is.

A matematika tudománya is rohamosan fejlődik, és egyre gazdagabb tudásra teszünk szert, vagyis egyre nő ennek a tudománynak az eszköztára. Amit azonban 2500 évvel ezelőtt bebizonyítottak, az ma is érvényes. A Pitagorasz-tétel ma is változatlanul helytálló. Igaz, ki kell kötnünk, hogy például nem egy gömbfelületen vagyunk, hanem a síkon. Ez a kikötés azonban nem ennek a tételnek a cáfolata, hanem a róla szerzett tudásunk elmélyítése, kibővítése. Tehát ma is úgy gondoljuk, hogy a *Természet könyve* valóban a matematika nyelvén íródott.

Dinamikai modell

Ebben a jelenlegi könyvben, amit az olvasó a kezében tart, a *Természet könyvé*nek azokból az oldalaiból szemezgetünk, amelyek változásokról szólnak. Mozgó, fejlődő, időben alakuló, bonyolult mintát, illetve térbeli változást képező jelenségeket vizsgálunk, és ezeket a matematika nyelvén igyekszünk leírni. Ezt a célt speciális *matematikai modellek*kel, más szóval *dinamikai modellek*kel valósítjuk meg. Szinonimaként fogjuk használni a modell, matematikai modell, dinamikai modell vagy *dinamikai rendszer* kifejezéseket.

A dinamika szó görög eredetű: a δύναμις szó erőt, teljesítményt jelent. A dinamó (egyenáramú áramfejlesztő) szó eredete is ugyanez. A magyar nyelvben a dinamikus szó jelentése erős, mozgékony, belső energiában gazdag. A szóhasználat onnan ered, hogy a mozgást mindig erők okozzák.

A modellalkotás első lépésében igyekszünk jól körülhatárolni azt a jelenséget, jelenségkört, amit modellezni akarunk. Ez a körülhatárolás azt jelenti, hogy olyan határokat keresünk, amelyen kívüli világ csak elenyésző mértékben hat a határon belüli világra, vagy hat ugyan, de ez a hatás egyszerű, jól átlátható. Ebben az értelemben a vizsgált jelenség *elszigetelt*. A valóságban minden mindennel összefügg, ezért ez az első lépés egy nagy fokú közelítés és absztrakció.

A második lépés is erős absztrakció. A világ végtelenül bonyolult, ez a lehatárolt világ is az. Mi a végtelen sok jellemző közül kiragadunk néhányat, és csak ezeket, ezek változását vizsgáljuk. Ezeket az állapotjellemzőket nevezzük állapotváltozóknak (létszám, hely, helyzet, hőmérséklet, nyomás stb.). A többi jellemző hatásától eltekinthetünk. Ezáltal létrehoztunk egy rendkívül elvont, a való világhoz képest hallatlanul egyszerű világot, amely most már készen áll a modellezésre. A dinamikai modell nem más, mint összefüggés az állapotváltozók és azok *változási sebesség*e között. Ha jól választottuk meg az állapotváltozókat, akkor találunk ilyen összefüggést, és az így létrehozott modell helyesen tükrözi a valóságot. Két konkrét példa kapcsán világítjuk meg, milyenek lehetnek ezek az állapotváltozók, és ezek segítségével hogyan alkotjuk meg, és hogyan működik a matematikai modell.

Egyszerű példák dinamikai modellekre

Az első példa az Escherichia coli baktériumkultúra [3.1.2.] (lásd a 3.1. alfejezetben is). A populáció időben változó létszáma érdekel minket. Nem érdekelnek minket a baktériumok biológiai tulajdonságai, táplálékuk, táplálkozásuk, életfeltételeik stb. Feltételezzük, hogy elegendő táplálék áll rendelkezésükre, és életfeltételeik optimálisan biztosítottak. Ilyen körülmények között a létszám változása kizárólag magától a létszámtól függ, és semmilyen más külső vagy belső tényezőtől nem függ. Ezzel megteremtettük a modellalkotáshoz szükséges elszigeteltséget. A modell azt rögzíti, hogy az állapotváltozó pillanatnyi sebessége, hogyan függ az állapotváltozó pillanatnyi értékétől, vagyis a létszám változásának pillanatnyi sebessége hogyan függ a pillanatnyi létszámtól. Ez a függés ebben a példában igen egyszerű. Ha x a pillanatnyi létszám, és v ennek változási sebessége (szaporulat/óra), akkor jó közelítéssel $v = 2{,}08x$ összefüggés áll fenn. A baktériumkultúra szaporodása természeti törvényének ez a matematikai leírása. E modellből kell „kihámozni" az állapotváltozó, vagyis a populáció méretének konkrét időfüggvényét. Ez az időfüggvény a modell megoldása, jelöléssel $x(t)$, ahol t-vel jelöljük az időt. A t a latin *tempus,* idő első betűje.

Mielőtt továbbmegyünk, érdemes néhány szót említeni az alkalmazott jelölésekről. Ellentétben a mi használatunkkal az x betűvel általában ismeretlen számot (például egy egyenlet ismeretlen megoldását), vagy egy függvény független változóját szokás jelölni. Mi egy ismeretlen függvényt jelölünk e betűvel. Többnyire a t idő függvénye, amit ha hangsúlyozni akarunk, akkor $x(t)$-t írhatunk. Több ismeretlen függvény megjelölésekor rendszerint az ábécé végén lévő betűket használjuk: v, w, x, y, z vagy a függvény hangsúlyozásával $v(t)$, $w(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Az ábécében nincs elég betű. Ezért indexelést is alkalmazhatunk: x_1, x_2, x_3, stb. E jelölésnek a korlátlanság mellett az is az előnye, hogy jelezni tudjuk egy tetszőleges kiválasztását ezek közül anélkül, hogy konkretizálnánk, melyik az a kiválasztott. Például x_i, ahol i az előforduló indexek bármelyike lehet. A matematika sajnos nem tud a jelölésekben szigorúan következetes lenni. Ezekkel az indexelt betűkkel más vonatkozásban konkrét számokat jelölünk.

Térjünk vissza vizsgált modellünkhöz! Hogyan „hámozzuk ki" a megoldást a modellből? Ezt a későbbi fejezetek konkrét példáiban megmutatjuk. Most csak annyit próbáljunk megértetni, hogy miben rejlik a nehézség. Ha ismernénk a populáció nagyságának időfüggvényét, $x(t)$-t, akkor egyszerű lenne meghatározni a sebesség időfüggvényét, $v(t)$-t. Amint azt később látni fogjuk, ilyenkor a deriválást alkalmazzuk. Fordítva: ha ismert lenne a $v(t)$, akkor a későbbiekben körvonalazott integrálással ki tudnánk számítani az $x(t)$-t. Az a probléma, hogy egyik sem ismert. Az $x(t)$-ből következik $v(t)$, és $v(t)$-ből következik $x(t)$, de mindkettő ismeretlen. Ez tipikusan egy *visszacsatolás,* általánosan használt angol terminológiával *feedback.* Valamennyi dinamikai modellben visszacsatolással találkozunk. Sok speciális esetben, mint ebben a példában is van módszer a dinamikai modell megoldására. Nem létezik azonban általános módszer.

Érdekes kérdés: miért tartalmaznak a dinamikai modellek visszacsatolást? A válasz: valószínűleg ilyen a természet.

A vizsgálat kezdete a t_0 időpillanat. A létszám alakulása attól függ, hogy kezdetben mennyi volt a létszám, $x(t_0)$. Az állapotváltozónak ezt az induló értékét nevezzük *kezdeti érték*nek vagy *kezdeti feltétel*nek. Minden kezdeti értékhez más megoldás tartozik, ezért végtelen sokféle megoldás lehetséges. Ez nem meglepő, hiszen a természeti törvényeknek végtelen sokféle jelenség lehet a következménye.

Az a tény, hogy adott kezdeti feltételhez egyetlen megoldás tartozik, azt jelenti, hogy modellünk a jelenből képes megjósolni a jövőt, a jelen *determinálja* a jövőt. Ez jelenti a *determinizmus*t. A szó latin eredetű, a *determinare,* meghatározni, határolni, határt szabni főnévi igenévből.

A megoldások egyik alakja $x_0 8^{(t-t0)}$ alakúak, ahol $x_0 = x(t_0)$. Vagyis a kezdeti létszámot szorozni kell 8 annyiadik hatványával, ahány óra az indulási idő óta eltelt. Ha kezdetben 1000 volt a baktériumok egyedszáma, és $t_0 = 1$ az indulás, akkor e kezdeti értékhez tartozó konkrét megoldás $x(t) = 1000 \times 8^{(t-1)}$. Például 10 óra elteltével az egyedszám ezer milliárd lesz.

Ez az $x(t)$ egy konkrét megoldás, más szóval *partikuláris megoldás.* Ha t_0-t és x_0-t nem konkretizáljuk, hanem meghagyjuk tetszőleges paramétereknek, akkor az $x_0 8^{(t-t0)}$ alakot általános megoldásnak nevezzük. A latin *particula* főnév kis részt jelent. A kiszámított megoldások jól egyeznek a kísérleti eredményekkel, és ez a tény igazolja e modell helyességét.

$t < t_0$ a múlt, $t = t_0$ a jelen, és $t > t_0$ a jövő. A $8^{(t-t0)}$ exponenciális függvény negatív exponensre is értelmezve van. Így a jelenből nem csupán a jövőt ismerjük, hanem a múltat is. Ezt nevezzük *reverzibilitás*nak. (A *reversare* jelentése latinul *visszafordítani*, az *-ibilis, -bilis* képző képességet jelöl, reverzibilitás = megfordíthatóság.) A reverzibilitás azért áll fenn, mert bármely kezdeti feltételhez egyetlen megoldás tartozik. Ez az *egzisztencia és unicitás* érvényesülése. Az egzisztencia itt azt jelenti, hogy az adott kezdeti feltételhez létezik megoldás, az unicitás pedig azt, hogy csak egyetlen megoldás létezik. Latinul *existere* létezni, és a latin *unus* jelentése egy.

A baktériumok egyedszáma csak egész szám lehet. Nagy létszámnál ennek nincs jelentősége. Kis létszámnál azonban van. Ezért például ha $x_0 =$ 1000, akkor 2 óránál nem mehetünk korábbra vissza. Az időben előre haladva sem mehetünk bármeddig, mert a táplálék és az élettér soha nem korlátlan a baktériumkultúra számára. Maga a modell matematikai értelemben sokkal tágabban használható, mint populációdinamikai értelemben. A reális alkalmazáshoz mindig figyelembe kell venni a *modell korlátai*t.

Az Escherichia coli baktériumok egysejtűek, osztódással szaporodnak. A sejtosztódáshoz körülbelül 20 perc kell. Tehát a modellben az idő nem folytonos. Egyetlen baktérium esetén az időt diszkrét lépésekben számíthatjuk csak: 20, 40, 60 perc, vagyis ⅓, ⅔ és 1 óra. Igen nagy létszám esetén, mivel a baktériumok nem feltétlen ugyanabban a pillanatban osztódnak, az idő egyre inkább megközelíti a folytonost. Jelen példában is folytonosnak tekintjük az idő változását. Sok való világi jelenségnél csak diszkrét időlépésekben haladhatunk. Más esetben az idővel mint folytonos mennyiséggel számolhatunk. Ennek megfelelően léteznek *diszkrét* és *folytonos dinamikai modell*ek.

Folytonos dinamikai rendszerben az x állapotváltozó tipikusan nem állandó, hanem az idő mentén változik. Általában a változás sebessége (v) sem állandó, hanem pillanatról pillanatra változik. A pillanatnyi sebességet *differenciálhányados*nak nevezzük. Az elnevezést később megindokoljuk. *Differenciálegyenlet*nek nevezzük azokat az egyenleteket, ahol v x-nek a függvénye. Tehát jelen modellünk,

$v = 2{,}08x$ is differenciálegyenlet. A dinamikai modellek általában differenciálegyenletekből állnak.

Más baktériumok eltérő ütemben osztódnak. A modell hasonló, csak a 2,08 konstans változik. Egy általánosabb vizsgálat esetén *paraméter*t alkalmazhatunk: $v = cx$. Tehát itt c egy tetszőleges pozitív paraméter, értéke a vizsgált baktériumkultúrától függ. Így nem egy, hanem végtelen sok hasonló modellt alkottunk: minden egyes rögzített c érték egy más meghatározott modellt eredményez. A különböző modellekben alkalmazott paraméterek szerepe többnyire ez a tágabb körű alkalmazhatóság.

Modellünkben óra *mértékegység*et alkalmaztunk. Ha valamit mérünk, mértékegységet kell választanunk. Ha választottunk, a modellben már csak puszta számok lesznek. Azonban a mértékegység megváltoztatásakor változnak a modellben szereplő paraméterek számértékei is. Például óra helyett napokra áttérve a 2,08 paraméter helyett annak 24-szeresét kell tennünk. Perc választása esetén 2,08 60-ad része fog szerepelni.

Második példánk a Lotka–Volterra-modell, amelyről a 4.5. alfejezetben lesz még szó. Ez a modell egy zsákmány és egy ragadozó állatfaj együttélése során a létszámok alakulását írja le. Rendszerünk állapotát két változó jellemzi: x a zsákmányállatok létszáma, y pedig a ragadozóké. Feltételezzük, hogy e kettő elegendő az időbeli változások leírásához. Sok külső és belső tényező is befolyásolja ezeknek az állatoknak az életét, szaporodásuk alakulását. A megdöbbentő az, hogy az egyedszámok változásának jellege e sok egyéb tényező figyelmen kívül hagyásával is jól követhető. Ilyen értelemben elszigetelten tekintjük rendszerünket. Most tehát csak két állapotváltozó és ezek változási sebességei között írunk le matematikai kapcsolatot. x változási sebességét v-vel és y-ét w-vel jelöljük. A modell két szimpla differenciálegyenlet:

$$v = ax - bxy$$
$$w = -cy + dxy$$

Négy paraméter szerepel itt: a, b, c és d. Minden egyes rögzített számnégyeshez más-más konkrét modell tartozik. Minden együtt élő zsákmány-ragadozó pároshoz meg kell találni a legmegfelelőbb paraméternégyeseket.

A létszámok alakulását, vagyis a jelenséget itt is természetesen ebből a modellből kell „kihámozni" a *modell megoldása* által. A kezdeti értékre ehhez itt is szükség van. A kezdeti érték megadásával aztán adott a múlt és a jövő. Érvényesül tehát a determináltság és a reverzibilitás.

A dinamikai modellek (modellcsaládok) egyik megkülönböztetése, hogy hány állapotváltozó szerepel bennük. Az eddigi két példában egy és kettő az állapotváltozók száma. Mindkét esetben az állapotváltozók a vizsgált populációk mérete. Sok modell ugyancsak populációkat vizsgál. Ezek analógiájára beszélhetünk az állapotváltozók száma helyett *a modell szereplőinek számá*ról.

A későbbi fejezetekben egy-, két-, sőt többszereplős modelleket is vizsgálunk. Akárhány szereplő van a modellben, az eddig mondottak (kezdeti érték, determinizmus, általános és partikuláris megoldás, reverzibilitás, egzisztencia és unicitás, paraméterek, mértékegységek stb.) igazak maradnak. Az is érvényes marad, hogy a dinamikai modellek felírhatók ilyen módon: az állapotváltozók változási sebessége (bal oldal) egyenlő az állapotváltozók adott függvényével (jobb oldal). Tehát annyi egyenletre van szükség, amennyi a szereplők száma.

Közönséges differenciálegyenletek és egyéb modellek

Mindkét példánk olyan dinamikai modell, amelyet *közönséges differenciálegyenlet*nek nevezünk (KDE). A „differenciál" szó értelmét alant világítjuk meg. A „közönséges" jelző arra utal, hogy a mozgások csak egyetlen változó mentén, tipikusan az időben történnek. Ez természetesen nagy egyszerűsítés, hiszen a mozgások, átalakulások, változások nem csupán az időben, hanem a térben is bekövetkeznek. Ekkor nemcsak az idő szerinti változási sebességeket kell tekinteni, hanem a térben, a különböző irányokban bekövetkező változások sebességeit is. Az ilyen modellek úgynevezett *parciális differenciálegyenletek*ből épülnek fel (PDE). Ezekkel a differenciálegyenletekkel nem foglalkozunk, de röviden szót ejtünk a hullámokról, amelyekben időbeli és térbeli változások figyelhetők meg (lásd a 4.5. alfejezetet).

A dinamikai modellekben az állapotváltozók változási sebessége leggyakrabban az állapotváltozók pillanatnyi értékeinek a függvénye. Néha azonban ez nem helytálló, mert a pillanatnyi sebesség egy korábbi állapot függvénye. Ez a késlekedés is modellezhető. Azokat a differenciálegyenleteket, amelyekben a pillanatnyi változási sebességek meghatározásában korábbi állapotok is fellépnek, *retardált differenciálegyenletek*nek (RDE) nevezzük. A retardált szó a középkori latin *retardare,* lassítani főnévi igenévből származik.

Annak érdekében, hogy érzékeltessük, milyen bonyolult a természet, és a *Természet könyvé*nek megértő olvasásához mennyire sokrétű „nyelvre", matematikai eszköztárra van szükség, említsük még meg az úgynevezett *sztochasztikus differenciálegyenletek*et (SDE). A KDE-, PDE- és RDE-modellek egyaránt determinisztikusak. Alkalmasak a jövő prognosztizálására. A természet azonban véletlen jelenségeket is szép számban produkál. Ezeknél a jövő részben vagy egészben kiszámíthatatlan. A véletlen jelenségek lefolyását SDE-modellekkel vizsgálhatjuk.

Jelen könyvben nem foglalkozunk PDE és RDE típusú modellekkel. Két egyszerű példát mutatunk SDE típusú modellre a 3.3. és a 4.6. alfejezetekben. A hangsúlyt a KDE-modellekre fektetjük.

Numerikus szimulációk

A dinamikai modell megalkotása hatalmas lépés, de többnyire még fáradságos, hosszú utat kell megtenni a modell megoldásainak feltárásáig, vagyis a modellezett törvényből fakadó jelenségek megismeréséig.

Egészen egyszerű dinamikai modellek „kézzel" is kezelhetők, a számításokat a matematikus papíron ceruzával elvégezheti. Ma már persze nem ez a jellemző. Ha valamilyen dinamikai modellt alkalmazás céljára alkotunk, tehát a természet, társadalom vagy technika valamilyen nehéz problémáját akarjuk megérteni, megoldani, akkor számítógépet használunk. Ezt az eljárást nevezzük *numerikus szimulációnak*. Ehhez külön matematikai módszerek is léteznek [1.6.]. Az eredményt sokszor nem csupán számokban, képletekben kapjuk meg, hanem rendkívül áttekinthető, nagy felbontású ábrákban, mozgó képekben, animációkban is. A numerikus szimulációk jelen vannak a kutatás-fejlesztésben, a gyártásban, az oktatásban. Alkalmazzuk szinte az élet minden területén: meteorológia, közlekedés, környezetvédelem, gazdasági előrejelzések, biológiai kutatások, csillagászat stb. A modern számítógépek hozzásegítenek minket a *Természet könyvé*nek mélyreható tanulmányozásához.

Az első nagy méretű numerikus szimulációt a II. világháború alatt és után (1942–1946) az Egyesült Államok vezetésével, az Egyesült Királyság és Kanada részvételével végezték a Manhattan Project keretében. A cél az első nukleáris fegyver kifejlesztése volt. Ehhez modellezték a nukleáris detonációt. A célt tekintve ez szomorú indulás. Az elmúlt 70 év alatt hihetetlen mértékű volt a fejlődés. A számítógépek teljesítőképessége olyan mértékben növekedett, hogy ilyen sebességű változás bármely más területen is páratlan az emberiség történetében.

A Manhattan Project után egy másik sokat emlegetett eredmény Edward Lorenz nevéhez fűződik, aki 1961-ben számítógépe segítségével korszakalkotó felfedezést tett a káosszal kapcsolatosan (lásd később az 5.6. alfejezetet). Érdemes áttekinteni, mennyit fejlődtek a komputerek Lorenz óta. Van egy mérőszám, a FLOPS (*floating point operation*/s – lebegőpontos művelet/s), amely tökéletlensége ellenére elég jó paraméter az összehasonlításhoz. Eszerint ötévente durván tízszeres a növekedés. Vagyis 1961 óta eltelt 60 évben 12 nagyságrenddel nőtt a másodpercenként elvégzett műveletek száma: 1961-hez képest ma ezermilliárdszoros!

Milyen oksági kapcsolatok léteznek a jelenségek között?

A természetnek matematikai nyelven történő leírása vajon mit árul el a világ különböző dolgai és jelenségei közötti összefüggésekről, kapcsolatokról? A dinamikai modellek jórészt determinisztikusak. Ősidők óta a tudatában vagyunk az oksági összefüggéseknek, a szükségszerűségnek, vagyis a determinizmusnak. Valószínűleg nem ennyire ősi, de ugyancsak régi keletű a véletlen ismerete. Egészen új keletű a káosz fogalma. Mai tudásunk szerint a minket körülvevő, örökmozgó, változó világ mennyire determinisztikus, mennyire véletlenszerű, mennyire kaotikus? Egyik jelenség okozza a másikat, vagy inkább a véletlen dominál? Vagy netán kaotikus zűrzavar van? Van-e a három fogalom, a determinizmus, a véletlen és a káosz között kapcsolat? Vagy ezek kizárják egymást? És egyáltalán: mit takarnak ezek a fogalmak?

E kérdésekre próbálunk választ adni ebben a könyvben. Jelenségeket és azok dinamikai modelljeit fogjuk vizsgálni, és ezeken keresztül keressük a válaszokat kérdéseinkre.

2. MOZGÁS ÉS SEBESSÉG

A dinamikai modellek egyenletei az állapotváltozók és az állapotváltozók változási sebességei közötti összefüggéseket fogalmazzák meg. Így írják le a mozgást meghatározó törvényeket. Ezért a dinamikai modellekben a sebesség alapvető fogalom. Ha csak egyetlen állapotváltozónk van, legyen ez x, és ennek változási sebessége v, akkor a modell az x és v közötti matematikai kapcsolatot írja le. Mindkettő, x és v az idő ismeretlen függvénye. Csupán a kettő kapcsolatában kifejezett törvényt, valamint a t_0 jelen időpillanatbeli x_0 állapotot ismerjük. Ebből kell „kihámozni" magát az x időfüggvényt, vagyis a modell megoldását. De ahhoz, hogy ezt megtehessük, pontosan tisztában kell lennünk a sebesség minden csínjával-bínjával.

Pillanatnyi sebesség

Az x állapotváltozó bármi lehet (út, nyomás, hőmérséklet, kémiai koncentráció stb.), de a szemléletesség érdekében alanti magyarázatainkban az utat választjuk. Például egy jármű haladási sebességéről beszélünk. Az úgynevezett út-idő diagramban a jármű x helyét írjuk le a t idő függvényében. Ilyen út-idő diagramot mutat a 2.1. ábra. Itt a (t, x) koordináta-rendszerben a vastagabb vonal mutatja, hogy adott t időpillanatban melyik x helyen tartózkodik a jármű.

2.1. ábra

Különböző időpillanatokat jelöltünk be. Mindegyiknél más jellegű a sebesség. A t_0 időpillanatban az x_0 helyről indulunk. Ez a hely egészen a t_1 időpillanatig nem változik, ez a rész az x tengellyel párhuzamos egyenes szakasz. Tehát t_0-tól t_1-ig nincs mozgás, a sebesség nulla. A jármű egy helyben, az x_0 helyen tartózkodik.

A t_1 és t_2 pillanatok között egyenletesen nő a megtett út, és x_0-ból az x_1 helyre jutunk. Ekkor a v sebesség a megtett $x_1 - x_0$ út és az eltelt $t_2 - t_1$ idő hányadosa. Ebben az időintervallumban bárhol mérünk egy kisebb időintervallumot, és az ezalatt megtett utat, a kettő hányadosa mindig ugyanaz lesz, mert a sebesség itt állandó. Az út-idő diagramnak az a része egy egyenes szakasz, amely az x tengellyel α (alfa) szöget zár be. Ennek tangense egyenlő a sebességgel, vagyis az említett hányadossal. Ez a tg(α) mennyiség ennek az egyenes szakasznak az *iránytangens*e. A tangens szó a latin *tangere,* érinteni főnévi igenévből származik.

Fontos megjegyezni, hogy mindez csak rögzített mértékegységek használata esetén érvényes. Például megállapodunk, hogy az utat km-ben, az időt pedig órában mérjük. Ebben az esetben x, t és v egyaránt puszta, dimenziótlan számok. Pontosan ugyanúgy, mint ahogy az α és tg(α) is az. Ha megváltoztatjuk a választott mértékegységeket (például km helyett m és óra helyett másodperc), akkor valamennyi szám, és természetesen az egész ábra is megváltozik.

Következőnek tekintsük a t_2-től t_3-ig eltelt időintervallumot. A sebesség itt is állandó. De amíg az előbb pozitív volt, addig most negatív, mert ennek az egyenes szakasznak az iránytangense negatív. Megállapodás kérdése, hogy mit tekintünk pozitív iránynak. Bárhogyan állapodunk is meg, e második esetben a haladási irány előjelet vált az előző esethez képest.

A t_3-tól t_7-ig terjedő intervallumban a sebesség folytonosan változik. Vagyis minden pillanatban más és más a pillanatnyi sebesség. Kinagyítottunk a diagramon egy nagyon kicsiny időintervallumhoz tartozó részt. A kinagyításban a görbe egyenesnek látszódik. Minél kisebb a választott időintervallum, annál jobban közelíthető az adott görbeszakasz egyenessel. Ennek a közelítő egyenesnek az iránytangense adja közelítőleg a pillanatnyi sebességet az intervallumon belüli időpillanatban. Az intervallumnak a csökkentésével a görbét közelítő egyenes egyre inkább megközelíti a görbe érintőjét a választott időpillanatban. A görbe érintőjének iránytangense pontosan egyenlő az érintési ponthoz tartozó pillanatnyi sebességgel.

Az ábrán a kinagyított képből az is világos, hogy a görbe szakasz igen jó közelítéssel az érintőjével helyettesíthető. Ezt a helyettesítést nevezzük *linearizálás*nak. A Föld átmérője olyan hatalmas a szemünkkel befogható távlathoz képest, hogy a tengert síknak látjuk. Ekkor a földfelszín és a tartózkodásunk pontjában elképzelt érintősík megkülönböztethetetlen.

Ha a sebesség változik, akkor a hétköznapi szóhasználatban gyorsulásról és lassulásról beszélünk. Állandó sebességnél nincs sem gyorsulás, sem lassulás. Ebből a szempontból a sebességnek nem tekintjük az irányát, csak az abszolút értékének változását figyeljük. Így a $[t_3, t_4]$ és a $[t_5, t_6]$ intervallumokban gyorsulásról, a $[t_4, t_5]$ és $[t_6, t_7]$ intervallumokban pedig lassulásról beszélünk.

Matematikailag az előjeles sebesség változását vizsgáljuk. A sebességnek egy referenciairányhoz képest tulajdonítunk pozitív vagy negatív előjelet. A v sebességnek a változási sebességét *gyorsulás*nak nevezzük, és általában a-val jelöljük. Ha a v sebesség növekedik, akkor az a gyorsulás pozitív, ha v csökken, akkor a negatív, ha pedig v állandó, akkor a nulla. Így a $[t_3, t_4]$ és a $[t_6, t_7]$ intervallumokban pozitív gyorsulást, a $[t_4, t_5]$ és $[t_5, t_6]$ intervallumokban pedig negatív gyorsulást említünk.

A hétköznapi és a matematikai szóhasználat különbsége még világosabbá válik egy egyszerű példával. A 10 nagyobb, mint az 1 bármilyen értelemben. Ellenben a –10 kisebb, mint a –1, bár az abszolút értéküket tekintve éppen fordított a nagyságrend közöttük.

A t_4 és a t_6 időpillanatokban a gyorsulás előjelet vált. Ekkor az út-idő diagram görbéjének *inflexiós pont*ja van. Vagyis a görbe az érintő egyik oldaláról a másik oldalára megy át. Az inflexió szó latin eredetű. Latinul a *flectere* azt jelenti, hogy hajlítani, az *inflectere* pedig hajlítani, változtatni. Innen származik a flexibilis (hajlékony) szó is. Az inflexiós pontban a pillanatnyi gyorsulás nulla.

A t_5 időpillanatban a megtett út növekedőből csökkenőbe vált. A váltás pillanatában a pillanatnyi sebesség nulla. Itt a diagramnak *helyi maximum*a van. Ha a megtett út csökkenőből növekedőbe váltana, akkor *helyi minimum* lenne, és a pillanatnyi sebesség a váltáskor ugyancsak nulla lenne.

A pillanatnyi sebesség tehát megegyezik az út-idő diagram adott időpillanathoz tartozó érintőjének iránytangensével. Ha a sebesség egy tartományban állandó, akkor az út-idő diagram itt egyenes. Az egyenes önmagát érinti, így itt is helytálló a sebesség érintővel történő meghatározása.

Mi az érintő iránytangense a t_1, t_2 és t_3 időpillanatokban? A szó köznapi jelentésében ezek közül bármelyikben természetesen létezik egyenes, amely kizárólag az adott pontban érinti a diagramot. Nem is egy, hanem végtelen sok ilyen egyenes van. A nem egyértelműség miatt azonban ezeket az egyeneseket matematikailag nem nevezzük érintőnek. Ezt a kizárást a fizika teljes mértékben alátámasztja. Ugyanis e pontokhoz balról közelítve egészen mások a pillanatnyi sebességek, mint jobbról közelítve. Vagyis egy ilyen töréspont azt jelenti, hogy a pillanatnyi sebesség nulla idő alatt nem nulla értékkel megváltozott. Például 5 km/h sebesség egy pillanat alatt –5 km/h-ra vált. Ez fizikailag lehetetlen.

Egy adott pontban az érintő iránytangensét a függvény e pontbeli *deriváltjá*nak vagy szinonimaként *differenciálhányados*ának nevezzük. A latin *derivare* jelentése származtatni, az ugyancsak latin *differentia* pedig különbséget jelent. Az érintő a szelő határhelyzete. Ennek a ténynek az alapján tudjuk kiszámítani a deriváltat. Ezért nevezhetjük dinamikai modelljeinket differenciálegyenleteknek.

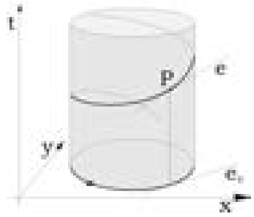
Változó irányú sebesség

Az eddigiekben csupán a szemléletesség kedvéért választottuk útnak az időben változó x jellemzőt. Hiszen az úton haladás annyira közel áll hozzánk, annyira jól ismert. Azonban amiket elmondtunk, igazak akkor is, ha például x hőmérséklet vagy egy populáció létszáma, vagy nyomás stb. Általánosságban igaz bármilyen *skalár* x-re. Skalárnak nevezünk egy mennyiséget, ha csak nagysága van (pozitív vagy negatív előjellel), és nincs iránya. Az erőhatás nem skalár, hanem *vektor,* mert iránya is van. A skalár szó eredete a latin *scala,* létra, a vektoré pedig a *vehere,* hordozni, szállítani. Talán az van ezek mögött, hogy a létrán egy irányban haladhatunk lefelé vagy felfelé, szállítani azonban bármilyen irányban lehetséges.

Az út mint állapotváltozó azonban lényegesen különbözhet más skalármennyiségtől, például az egyedszámtól. Az utóbbi kizárólag skalár lehet, de az út lehet vektor is. Az út csak akkor skalár, ha egy egyenes mentén mérjük. A síkon két-, a térben háromdimenziós vektor. A ferde hajítás pályája síkban van (lásd a 4.2. alfejezetet). A síkban felveszünk egy koordináta-rendszert, például x és y változókkal, és a mindenkori hely vektorát két *komponens*re bontjuk: x és y. Külön vizsgáljuk az x és külön az

y irányú haladás sebességét, amelyet jelöljünk a v és w betűkkel. Ekkor a sebesség is vektor, amelynek két komponense éppen v és w. A ferde hajítás parabola pályáját a 4.2.2. ábrával szemléltetjük. Ez az ábra tehát a modell megoldásának vizualizálása. Vajon a sebesség itt is e görbe érintőjének iránytangense? Nem!

Ha egy skalár x mennyiség t időbeli változását egy (t, x) koordináta-rendszerben ábrázoljuk, akkor adott pontban húzott érintő iránytangense az e pontbeli pillanatnyi sebesség. De hogyan határozható meg egy x és y komponensű vektormennyiség t időbeli változási sebessége? A választ egy konkrét példa, a síkban történő körmozgás kapcsán adjuk meg. Most nem két-, hanem háromdimenziós koordináta-rendszerre van szükségünk: az (x, y) síkra merőlegesen felvesszük a t időtengelyt. Az (x, y) sík az, ahol a körmozgás végbemegy (2.2. ábra). A mozgás körére egy hengert emelünk, amelynek palástján ábrázoljuk az út-idő diagramot. A diagram bármely P pontjának a síkban lévő körre való vetülete adja meg azt, hogy a kör melyik pontjához tartozik, a magassága pedig az ehhez tartozó időpontot. A P-hez húzott e érintő iránytangense, amely a t tengellyel bezárt szöggel mérendő, adja meg a pillanatnyi sebesség nagyságát, e_v vetülete, amely az adott pontban érinti a pályagörbét, csak a sebesség irányát adja meg, de a nagyságát nem.



2.2. ábra

Állandó irányú haladás esetén, ha a mozgó testre semmilyen erő nem hat, akkor ez a test elvileg örökké megtartja sebességét. Szabad mozgású fizikai test nem marad körpályán. Csak külső erő képes egy testet nem egyenes, hanem például körpályára kényszeríteni. Ha ez az erő hirtelen megszűnik, akkor a test a pillanatnyi sebességével a pillanatnyi irányba repül ki. Ezen alapul a diszkoszvetés, a kalapácsvetés, és a parittya is.

A diszkoszvetés már az i. e. 8. században szerepelt az olümpiai játékokon. Mürón athéni szobrász i. e. 450 körül készített Diszkobolosz szobra elveszett, csak római márványmásolatokból ismert. A 2.3. ábra bal szélén a müncheni Glyptothekben található 2. századi bronzmásolat képe látható (https://en.wikipedia.org/wiki/Discobolus, CC BY 2.5).

A kalapácsvetés ugyan nem szerepelt az antik görög olümpiai játékokon, de ugyancsak régmúltra tekinthet vissza. A hajítás távolsága durván a kezdeti sebesség négyzetével arányos. Forgatással sokkal nagyobb

2.3. ábra

kilövési sebesség érhető el, mint az egyenes vonalú dobással. Ezt jól szemlélteti a kalapácsvetés és a súlylökés összehasonlítása. Férfiaknál mindkét esetben 7,26 kg súlyról van szó. A súlylökési világrekord 23,37 m, kalapácsvetési világrekord 86,74 m. A diszkoszvetés világrekordja 74,08 m. A kilökés sebessége súlylökésnél durván 15 m/s. A diszkosznál és kalapácsvetésnél hozzávetőleg a duplája.

Egy adott gyorsító erő alkalmazása mellett minél hosszabb út áll rendelkezésre az elhajítandó tárgy sebességének növelésére, annál nagyobb lesz az út végén elérhető sebesség. A súlylökésnél a gyorsítási út nagyságrendben 2 m. Körpályán pörgetésnél jóval hosszabb gyorsítási út érhető el. Ez a nyitja annak, hogy forgatással sokkal messzebbre lehet dobni.

A parittya az ókorban közkedvelt és hatékony fegyver volt. A bibliai időkből származó egyiptomi és asszír ábrázolásokon is találkozhatunk a parittyával. A 2.3. ábrán középen: parittyás harcosok a római Traianus-oszlopon, i. sz. 2. sz. (https://en.wikipedia.org/wiki/Sling_(weapon), public domain). A harcos a feje felett megforgatott egy zsineg végén lévő bőrdarabba befogott követ vagy ólomtöltetet, és kellő pillanatban elengedte a zsineget. A nagy sebességre felgyorsított kő a célzott irányba repült ki. A kő tömege 0,05 és 0,5 kg között változott. A kilőtt kő sebessége 45–65 m/s nagyságúnak feltételezhető. A hatótávolsága ennek megfelelően a 400 m-t is elérhette.

A Biblia több helyen is említ parittyát. Dávid parittyával ölte meg az óriási testméretű filiszteus Góliátot. (2.3. ábra jobb oldalán Michelangelo Buonarroti 1501 és 1504 között készített Dávid-szobra Firenzében, https://hu.wikipedia.org/wiki/Michelangelo_Dávid_szobra, CC BY-SA 3.0, szerző: Bittner Unna.)

Az izraeliták és a filiszteusok harcban állnak. Góliát, az óriás termetű gyakorlott harcos keresi azt az izraelit, aki megküzdene vele, és ezzel eldőlne a csata sorsa. A tét óriási: a vesztes népe a győztes népének szolgája lesz. Egyetlen izraeli harcos sem mer kiállni Góliáttal. Dávid, a gyermek pásztor nem tudja tétlenül nézni Izrael népének és Istenének a megalázását. Fogja pásztorbotját, és parittyáját, tarisznyájába tesz a patakból felszedett öt követ, és vakmerően elindul, hogy így, szinte fegyvertelenül életre-halálra megküzdjön az állig felfegyverzett, páncélba öltözött hatalmas Góliáttal. Az első kővel leteríti ellenfelét, akinek a saját kardjával vágja le a fejét. A filiszteusok megfutamodnak, Izrael megmenekül.

Ez a történet több mint két és félezer éves. Lehet, hogy csak legenda. Nem is az az érdekes, hogy megtörtént-e, vagy sem. Igazsága az általa sugallt morális tanításban rejlik.

A pillanatnyi sebesség kiszámítása, deriválás

Hogyan lehet valamely mennyiség pillanatnyi változási sebességét kiszámítani? Ha ez a mennyiség vektor, akkor a sebessége is vektor, amelyet komponensenként kell kiszámítani. A komponensek skalárok. Vagyis elegendő skalármennyiség változási sebességével foglalkoznunk. A 2.4. ábrán egy x skalárt ábrázoltunk a t idő függvényében. E grafikon (t_0, x_0) pontjában akarjuk meghatározni az érintő iránytangensét. E pontban az e jelű egyenes jelöli az érintőt.

2.4. ábra

Az érintő helyett egy olyan szelőt vizsgálunk, amely e kiválasztott ponton és a görbének egy ettől eltérő (t_1, x_1) pontján halad át, lásd az sz jelű egyenest. Ennek iránytangense egyenlő az $(x_0 - x_1) / (t_0 - t_1)$ *különbségi hányados*sal, vagy *differenciahányados*sal. Minél közelebb van a (t_1, x_1) pont a (t_0, x_0) ponthoz, annál közelebb kerülünk az érintőhöz. A két pont nem eshet egybe, mert akkor a fenti hányados nem értelmezhető. Ehelyett azt nézzük, hogy az iránytangens mihez *tart* (mihez *konvergál*, a latin *con-* jelentése: össze és az ugyancsak latin vergere jelentése: valami felé törekszik), ha a (t_1, x_1) pont tart a (t_0, x_0) ponthoz. Nézzünk egy egyszerű példát!

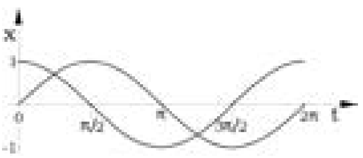
Legyen $x(t) = t^2$. Ez egy parabola. Ekkor $x_0 = t_0^2$ és $x_1 = t_1^2$. Tehát $(x_0 - x_1) / (t_0 - t_1) = (t_0^2 - t_1^2) / (t_0 - t_1)$. Két szám négyzetének a különbsége egyenlő a két szám összege szorozva a két szám különbségével, tehát: $(x_0 - x_1) / (t_0 - t_1) = (t_0^2 - t_1^2) / (t_0 - t_1) = t_0 + t_1$. Ez a $t_0 + t_1$ a szelő iránytangense. Mihez tart ez a szám, ha t_1 tart a t_0-hoz? Nyilván $2t_0$-hoz. Ha a differenciahányados valóban konvergál egy számhoz (ez a *konvergencia* esete), mint most, akkor ez a szám a differenciálhányados, és ez az érintő iránytangense.

Derivált függvény

A t_0 jelölés mögött egy konkrét időpontot, vagyis egy konkrét számot gondolunk. Ez a szám azonban tetszőleges. Tehát a t^2 függvény deriváltja bármely t értéknél $2t$. A $2t$ kifejezés maga is egy függvény. Ez más esetben is így van. Ha $v(t)$ az $x(t)$ sebessége bármely adott t-re, akkor $v(t)$-re azt mondjuk, hogy $x(t)$ sebességfüggvénye, matematikai nyelven *derivált függvénye* vagy röviden *derivált*ja. Csupán a $v(t)$ és $x(t)$ jelölésből nem világos, hogy ezek összetartoznak. Ezt külön meg kell mondani. Vannak más jelölések is, amelyekből az összetartozás azonnal kiderül. Ilyen a Newton-féle jelölés: vagy $\dot{x}$ vagy $\dot{x}(t)$. Most külön információ nélkül is látszódik, hogy $x(t)$ derivált függvényéről van szó. Az eljárást, amellyel a derivált függvényt meghatározzuk, *deriválás*nak vagy *differenciálás*nak nevezzük. A *differenciálszámítás* foglalkozik deriválási szabályok és eljárások meghatározásával, illetve a legfontosabb függvények deriváltjainak kiszámításával.

Néhány függvény deriváltjának meghatározása

Egy függvény derivált függvényét többféle módon is szokás jelölni. A Newton-féle jelölés: a függvényt jelentő betű (pl. x) fölé egy pontot teszünk. Egy másik jelölés a felső vessző alkalmazása. Tehát például az x(t) függvény derivált függvénye x’(t). Mindkét jelölést használni fogjuk.



2.5. ábra

Ha a függvényünk konstans, mondjuk, c, az a mozdulatlanságot jelenti, vagyis a sebesség minden időpillanatban nulla. Tehát c deriváltja nulla: . Vagyis, $x(t) = c$, akkor $x'(t) = 0$. Ez nyilván következik a fent vázolt kiszámítási módból, hiszen $(x(t) - x(t_0)) \,/\, (t - t_0) = (c - c)(t - t_0) = 0$.

Ha $x(t) = t$, vagyis egységnyi idő alatt egységnyi utat teszünk meg, akkor a sebesség minden időpillanatban egységnyi: $t' = 1$.

Az imént láttuk, hogy ha $x(t) = t^2$, akkor $x'(t) = (t^2)' = 2t$.

Legyen $x(t)$ = sin(t), akkor $x'(t)$ = cos(t). Ha pedig $x(t)$ = cos(t), akkor $x'(t)$ = -sin(t). E két állítást kissé komplikált bebizonyítani. Ehelyett megelégszünk szemléltetéssel e két trigonometrikus függvény grafikonját használva, lásd a 2.5. ábrát.

A szinuszfüggvény (nulláról indul) ott a legmeredekebb, ahol az értéke nulla. E pontokban (0, π és 2π) az érintő iránytangense 1, –1 és 1 (ugyanis az érintő 45, illetve –45 fokos). Ezeknél a koszinuszgörbe (1-ről indul) értéke is 1, –1 és 1. Ahol az érintő vízszintes, tehát a derivált nulla, a π / 2 és 3π / 2 pontokban, ott a koszinuszgörbe is nulla értékű. Bármely pontban jól követhető, hogy a szinuszfüggvény deriváltja pontosan úgy változik, ahogyan a koszinuszfüggvény értékei. Hasonlóképpen jól látható, hogy a koszinuszfüggvény deriváltja meg úgy alakul, ahogyan a szinuszfüggvény értékeinek mínusz egyszerese.

Az exponenciális függvények, például 2^t gyorsuló ütemben növekszenek. Ha különböző alapok mellett léptékhelyesen felrajzolnánk néhány exponenciális függvényt, akkor a következőt tapasztalnánk: ha az alap, mondjuk, 2,5 vagy annál kisebb, akkor bármely t értéknél a derivált kisebb, mint a függvényérték. Ha az alap csökken, akkor az eltérés is csökken. Ha azonban az alap 3 vagy annál nagyobb, akkor a derivált a nagyobb. Ahogy az alap növekedne, úgy lenne a különbség is egyre nagyobb. Ebből arra lehet következtetni, hogy 2,5 és 3 között létezni kell egy számnak, ahol a függvényérték minden t időpillanatban megegyezik a deriválttal. Ilyen szám valóban létezik. Ez egy irracionális szám, e-vel jelöljük, és közelítő értéke e = 2,71828. Ez a szám fundamentális jelentőségű a matematikában. A neve: *a természetes logaritmus alapszáma* vagy *Euler-féle szám.* Az e jelölést Leonhard Euler (1707–1883), a kiemelkedő jelentőségű svájci matematikus használta először. Tehát ha $x(t) = e^t$, akkor $x'(t) = e^t$.

Deriválási szabályok

A deriválási szabályok azt mutatják meg, hogyan kell kiszámítani azoknak a függvényeknek a deriváltjait, amelyeket már ismert deriválttal rendelkező függvényekkel képezünk. Ha a deriválandó függvény összetett, például két függvény összege vagy szorzata, akkor ezt az összetett kifejezést zárójelbe tesszük, és az elvégzendő deriválást jelölő felső vesszőt a zárójelen kívülre tesszük. Például két függvény összegének a deriváltját így jelöljük: (x(t) + y(t))′. E jelöléssel egyszerűen kifejezhetjük azt a néhány szabályt, amelyekre szükségünk lesz.

$$\left(cx(t)\right)' = cx'(t)$$

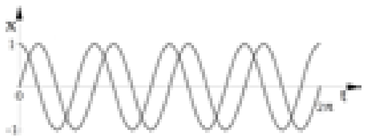
Ez nyilvánvaló: ha mindig c-szer annyi utat teszünk meg (c egy állandó), akkor a sebesség is c-szeres lesz.

$$\left(x(t) + y(t)\right)' = x'(t) + y'(t)$$

Ezt is könnyen értelmezzük: egy vonatban haladva (mondjuk, az étkezőkocsi felé) akkor a tényleges sebességünk egyenlő a vonat és gyaloglásunk sebességének az összegével.

$$\left(x(ct)\right)' = cx'(ct)$$

Ennek szemléletes magyarázata igen könnyű, ha nem általánosan nézzük, hanem alkalmazzuk például a szinuszfüggvényre. Az egyszerűség kedvéért legyen most $c = 4$. Tehát $x(t) = \sin(t)$, $x'(t) = \cos(t)$, $x(4t) = \sin(4t)$ és $(x(4t))' = 4\cos(4t)$.



2.6. ábra

A 2.6. ábrán látjuk sin(4*t*) és cos(4*t*) grafikonját. Ez segít a szabály megértésében. A megfelelő függvényértékek és deriváltak ismét együtt változnak. De most a szaporább lengések miatt a meredekségek négyszeresek.

$$\left(x(t + c)\right)' = x'(t + c)$$

E szabály szerint, ha ugyanazt az utat időeltolódással tesszük meg, akkor a pillanatnyi sebességek is ugyanolyan időeltolódást szenvednek. Például $(\sin(t + c))' = \cos(t + c)$.

Végül egy utolsó és nagyon fontos szabály, amelyre nehéz a fentiekhez hasonló szemléletes magyarázatot találni:

$$\left(x(t)y(t)\right)' = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$$

A szabályokat egy adott esetre egymás után is alkalmazhatjuk. Két példa:

$$(7\cos(2t - 5))' = 7(\cos(2t - 5))' = -14\sin(2t - 5)$$

$$(c_1 e^{c_2 t + c_3})' = c_1 c_2 e^{c_2 t + c_3}$$

3. EGYSZEREPLŐS JELENSÉGEK

3.1. Növekedés, stagnálás, kihalás

A legegyszerűbb dinamikai modell a $v = cx$. Vagyis az egyetlen állapotváltozó x egyenesen aránylik a változási sebességéhez, v-hez. Ebben a modellben c tetszőleges paraméter. Lényeges minőségi különbség van e törvény által létrehozott jelenségek között c előjelétől függően. Ha c pozitív, akkor öngerjesztő növekedésről beszélünk, $c < 0$ esetén kihalásról, és ha $c = 0$, akkor a modell stagnálást ír le. Mindhárom esetet megvizsgáljuk.

Öngerjesztő növekedés

Az öngerjesztő növekedést már érintettük az 1. fejezet első példájában. Most sokkal részletesebben vesszük górcső alá.

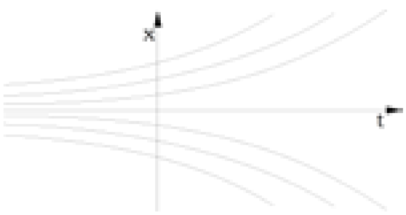
Az x állapotváltozó lehet hely vagy például egy populáció létszáma, vagy pénzösszeg stb. Közvetlenül ugyan nem szerepel a t idő, de beleértendő azáltal, hogy tudjuk, x és v függvényei t-nek. Az egyszerűbb tárgyalás érdekében vegyük a $c = 1$ esetet: $v = x$. Most tehát ez a konkrét modellünk. Később elmagyarázzuk, hogy mi lesz az eltérés a modell megoldásában, ha a pozitív c nem 1. A cél tehát a modell megoldása. Vagyis feltárni az állapotjellemző időbeli változásának függvényét, $x(t)$-t. Prognosztizálni a jövőt.

Első lépésben meghatározzuk, honnan induljon a folyamat, vagyis tetszőlegesen kijelöljük a kezdeti feltételt, a kezdeti t_0 időpontot és a kezdeti x_0 állapotváltozót. Ezeket paraméterekként kezelve az általános megoldást kapjuk. E két paramétert ne tévesszük össze a modell c paraméterével.

Az általános megoldás meghatározására általában három módszer áll rendelkezésre: az *analitikus megoldás*, a *kvalitatív vizsgálat* és a *közelítő* vagy *numerikus megoldás.* Az analitikus megoldás olyan eszközök alkalmazását jelenti, amellyel adott algoritmus szerint kiszámítjuk a folyamat pontos időfüggvényét. Az analitikus szónak görög az eredete: az $\alpha\nu\alpha\lambda\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\nu$, kioldani, megoldani, feloldani, elemezni szóból. E szó aztán a középlatin *analysis,* elemzés szóba ment át. Az *algoritmus* szó egy tulajdonnévből alkotott köznév: a 9. századi nagy arab matematikus és csillagász, Al-Hvarizmi latinos elferdítéséből származó műszó. Ő volt annak a módszernek a megalkotója, amelyet ma algoritmizálásnak nevezünk. Az algoritmus egy adott probléma megoldására alkalmas utasítássorozatot jelenti.

A 2. fejezetben láttuk, hogy az exponenciális függvény deriváltja önmaga: ha $x(t) = e^t$, akkor $v(t) = x'(t) = e^t$, vagyis valóban $v=x$. Ez tehát egy partikuláris megoldás. Mivel az $x_0e^{(t-t0)}$ függvény deriváltja is önmaga (lásd a deriválási szabályokat a 2. fejezetben), ezért ez az általános megoldás. Nagyon speciális eset az ilyen, amikor azonnal látjuk a megoldást, és semmiféle algoritmust nem kell alkalmazni. Éppen ezért egyelőre tekintsünk el attól, hogy most ismerjük az analitikus megoldást, és ehelyett foglalkozzunk inkább részletesen a kvalitatív vizsgálattal, majd a numerikus megoldással.

Most a kvalitatív vizsgálat is nagyon egyszerű. A latin *qualitas* kifejezés minőséget jelent. A minőségi vizsgálat csak a megoldások jellegét, karakterét célozza, nem a számszerűen pontos függvényt. Milyen jelleggel változik az állapotváltozó x a t idő függvényében? Ha $0 < x$, akkor a sebesség is pozitív. Pozitív sebesség eredménye, hogy x növekedik. Nem csupán növekedik, hanem az x függvény görbéjének meredeksége is együtt nő x-szel. Ha ellenben $x < 0$, akkor a sebesség is negatív, vagyis x egyre csökken. Egy negatív szám csökkenése abszolút értékének növekedését jelenti. A görbe most negatív irányban egyre meredekebb. Végül, ha $x = 0$, akkor a sebesség is nulla, vagyis ebben a nullhelyzetben marad az állapotváltozó örökké. Az ilyen állapotot *egyensúlyi helyzetnek nevezzük.* Ezek alapján már meg is kapjuk a megoldások jellegét a (t, x) koordináta-rendszerben, lásd a 3.1.1. ábrát. Az egyensúlyi helyzettől minden más megoldás távolodik. Az ilyen egyensúlyi helyzetet *instabilis*nak nevezzük. (A latin *stabilis* melléknév jelentése állandó. Az *in-* fosztóképző.) Modellünknek a rajzolt görbék nem pontos megoldásai, csak azok jellegét mutatják, vagyis a kvalitatív viselkedést.



3.1.1. ábra

Most rátérünk a numerikus közelítő megoldás módszerére. Többféle közelítő