Előszó a javított, nyolcadik kiadáshoz

A „Bronstejn” legfrissebb kiadása mintegy 50 év kézikönyvszerkesztői tapasztalatait sűríti egybe.
Az első kiadás, amely 1953-ban jelent meg Moszkvában, az akkor klasszikusnak számító alkalmazói témaköröket tárgyalta, tehát elsősorban műszakiaknak, mérnököknek szólt. Mintegy irodalmi háttere volt az akkor egyedül létező számítástechnikai eszköznek, a logarlécnek.
Az akkori kötet táblázatokkal és grafikonokkal kezdődött, majd az elemi matematikán keresztül eljutott az analitikus és differenciálgeometriáig és folytatódott a matematikai analízissel. A kötetet a mérési eredmények kiértékelését tárgyaló fejezet zárta. Mindez a jelen könyv terjedelmének a harmadát tette ki.
Magyarországon a „Bronstejn” eddig hat plusz egy kiadást ért meg. A hatodik kiadás 1987-ben a Műszaki Könyvkiadónál jelent meg, alapjául az 1980-as átdolgozott kiadás szolgált. Az átdolgozás azonban akkor is Németországban készült. A legutóbbi kiadás már számos új területtel bővítette az eredeti kötetet, pl.: halmazok, valószínűségszámítás és matematikai statisztika, matematikai programozás és numerikus módszerek. Az alkalmazások köre az elmúlt évtizedekben hihetetlen sebességgel és a legváratlanabb irányokban tovább bővült, és már korántsem korlátozódik a műszakiakra. A rendelkezésre álló eszköztár világszerte elterjedt hatékony programcsomagokat jelent, mint például a Mathematica vagy a Maple. A XXI. század feltalálói számára tehát még teljesebb átdolgozásra volt szükség. Ennek ékes bizonyítékát adja már maga a tartalomjegyzék is. Például külön fejezetek tárgyalják a dinamikus rendszereket, a számítógép-algebrát, és megtalálhatók a fuzzy logika, a kombinatorikus algoritmusok, a kriptológia, a műszaki jelanalízis új módszerei vagy az algebra modern ágai is. A tárgymutató még részletesebb eligazítást kínál közel 50 oldalon.
Az eredeti zsebkönyv legújabb kiadásai a lényegretörő tárgyalásmód, a hatékony szerkezeti felépítés és a míves tipográfia ellenére kézikönyvvé duzzadtak, a matematika felhasználhatóságát mintegy fizikai terjedelmükben is tanúsítva.
A Kiadó munkáját népes szakembergárda segítette. A fordítás alapjául szolgáló 1999-ben megjelent, negyedik átdolgozott és bővített német kiadás számos hiányosságát és pontatlanságát sikerült kijavítanunk. Ebben a munkában kiemelkedő szerepe volt Szép Gabriellának, a könyv angol nyelvű fordítójának és Rácz Andrásnak.
A jelen, nyolcadik kiadásban igyekeztünk gondosan kijavítani azokat a hibákat, amelyek az előző kiadás feszes határideje miatt sajnálatos módon előfordultak. Reméljük, hogy számukat már minimálisra szorítottuk vissza.
Itt említjük meg, hogy a mostani kiadásban már internet-honlapokat is feltüntettünk az irodalomjegyzékben, és a későbbi kiadásokban egyre bővíteni fogjuk az ilyen típusú hivatkozások számát. Emiatt arra kérjük a kedves Olvasót, hogy az újabb kiadásokra gondolva hívja fel a Kiadó figyelmét az általa hasznosnak tartott honlapokra.

2002. augusztus

A Kiadó

Tartalomjegyzék

1. Aritmetika

1.1. Elemi számolási szabályok

1.1.1. Számok

1.1.1.1. Természetes, egész és racionális számok

1. Értelmezési tartományok és jelölések
Minden egész és törtszámot, köztük a pozitívokat, a negatívokat és a nullát, *racionális szám*nak nevezünk. Ezzel kapcsolatban a következő jelöléseket használjuk (lásd Halmazelmélet, 287. old.):

- a természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- az egész számok halmaza: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- a racionális számok halmaza: $\mathbb{Q} = \{x | x = \dfrac{p}{q} \text{ ahol } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ és } q \neq 0\}$.

A természetes számokat a számlálás, ill. rendezés szükséglete hozta létre. A természetes számokat *nemnegatív egész számok*nak is mondjuk.

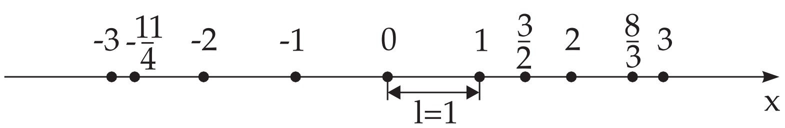
2. A racionális számok halmazának tulajdonságai

- A racionális számok halmaza végtelen.
- A halmaz *rendezett*, vagyis bármely két különböző racionális szám, a és b közül meg lehet mondani, hogy melyik kisebb, mint a másik (lásd 2. old.).
- A halmaz önmagában *sűrű*, vagyis bármely két különböző a és b $(a < b)$ racionális szám között létezik legalább egy c $(a < c < b)$ racionális szám. Ebből következik, hogy két különböző racionális szám között végtelen sok további racionális szám fordul elő.

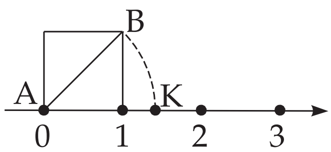
3. Aritmetikai műveletek
Két tetszőleges racionális számmal az aritmetikai műveletek (összeadás, kivonás, szorzás és osztás) mindig elvégezhetők, és eredményül megint racionális számot adnak. Kivétel a *nullával való osztás*, amely *lehetetlen*: Az $a : 0$ kifejezésnek nincs értelme, mert nincs olyan meghatározott b racionális szám, amelyre $a \neq 0$ esetén teljesülne a $b \cdot 0 = a$ egyenlőség; ha pedig $a = 0$, akkor b tetszőleges racionális szám lehet. Az $a \neq 0$ esetben gyakran alkalmazott $a : 0 = \infty$ (végtelen) írásmód nem jelenti azt, hogy ez az osztás lehetséges; ez csupán a következő állítás rövidítése: ha a nevező nullához közeledik, a hányados abszolút értelemben véve minden határon túl növekszik.

4. Tizedes tört és lánctört
Minden racionális szám előállítható véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört, valamint lánctört alakjában (lásd 2. old.).

5. Geometriai ábrázolás
Ha egy egyenesen rögzítve van **(1.1. ábra)** egy 0 (*nullpont*), egy pozitív irány (*irányítás*) és egy l hosszúságegység (lépték, lásd még skála,118. old.), akkor minden a racionális számnak megfelel az egyenes egy meghatározott pontja. Ennek a koordinátája a, és ez a pont úgynevezett *racionális pont*. Az egyenest *számegyenes*nek nevezzük. Mivel a racionális számok halmaza mindenütt sűrű, bármely két racionális pont között végtelen sok további racionális pont van.



1.1. ábra.



1.2. ábra.

1.1.1.2. Irracionális és transzcendens számok

Az analízis céljaira a racionális számok halmaza nem elegendő. Bár a számegyenes mindenütt sűrű, azt nem tölti ki. Ha például az egységnégyzet AB átlóját A körül elforgatjuk úgy, hogy B a számegyenes

K pontjába menjen át **(1.2. ábra)**, akkor K-nak nincs racionális koordinátája. Csak az *irracionális számok* bevezetése teszi lehetővé, hogy a számegyenes minden pontjához számot tudjunk rendelni.
Az analízis tankönyvei az irracionális számokra szabatos definíciót adnak, például intervallumskatulyázással. A szemlélet beéri azzal a megállapítással, hogy az irracionális számok a számegyenesnek azokat a pontjait foglalják el, amelyek a racionális számok között hézagként jelentkeznek, és hogy minden irracionális számot nem szakaszos végtelen tizedes törttel lehet előállítani.
Az irracionális számok közé tartoznak többek között az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ alakú algebrai egyenletek valós, nem egész gyökei, ahol $n > 1$ *egész*, és az együtthatók is egész számok. Egy példa az $x^3 - 9x + 4 = 0$ egyenlet. Az ilyen gyököket *algebrai irracionalitás*oknak nevezzük. Algebrai irracionalitásra a legegyszerűbb példák az $x^n - a = 0$ egyenletek valós gyökei, vagyis az $\sqrt[n]{a}$ alakú számok, ha nem racionálisak.

■ $\sqrt[2]{2} = 1{,}414\ldots$, $\sqrt[3]{10} = 2{,}154\ldots$ algebrai irracionalitások.

Azokat az irracionális számokat, amelyek nem algebrai irracionalitások, *transzcendens*nek nevezzük.

■ **A:** $\pi = 3{,}141592\ldots$, $e = 2{,}718281\ldots$ transzcendens számok.

■ **B:** Az egész számok tízes alapú logaritmusai, kivéve a 10^n alakúak logaritmusait, transzcendens számok.

1.1.1.3. Valós számok

Az összes racionális és irracionális számokat együtt valós számoknak mondjuk. Így kapjuk a *valós számok halmazát*, amelyet $\mathbb{R}$-rel jelölünk.

1. Alaptulajdonságok

A valós számoknak a következő alaptulajdonságai vannak:
- A valós számok halmaza végtelen.
- A valós számok halmaza *rendezett* (lásd 1. old.).
- A valós számok halmaza önmagában *sűrű* (lásd 1. old.).
- A valós számok halmaza *teljesen rendezett*, vagyis a számegyenes minden pontjának megfelel egy valós szám. A racionális számok halmazára ez nem érvényes.

2. Aritmetikai műveletek

Valós számokkal az aritmetikai műveletek mindig elvégezhetők és mindig valós számot kapunk eredményül; kivétel a 0-val való osztás (lásd 1. old.). A hatványozás szintén lehetséges. Ami a megfordításait illeti, minden pozitív valós számból vonható tetszőleges gyök és van tetszőleges pozitív ($\neq 1$) alapú logaritmusa. Az analízis számfogalmának további általánosítása a *komplex szám*okhoz vezet (lásd 34. old.).

Valós számoknak egy a, b végpontokkal rendelkező összefüggő halmazát, ahol $a < b$ és a lehet $-\infty$, b pedig lehet $+\infty$, *az a, b végpontú intervallum*nak nevezzük. Intervallumot az a, b végpontokkal lehet megadni úgy, hogy zárójelbe tesszük őket. Szögletes félzárójel zárt, kerek félzárójel nyílt intervallumvéget jelöl. Megkülönböztetünk (a, b) mindkét oldalról *nyílt intervallumokat*, $[a, b)$, ill. $(a, b]$ *félig-nyílt intervallumokat* és $[a, b]$ *zárt intervallumokat*. Nyílt intervallumokra szokásos még (a, b) helyett az $]a, b[$, ugyanígy $[a, b)$ helyett az $[a, b[$ jelölés. Grafikus ábrázolásnál a nyílt intervallumok végpontjait nyílhegyekkel, a zárt intervallumok végpontjait kitöltött pontokkal jelöljük.

■ **A:** 52 és 273 esetében $273 = 5 \cdot 52 + 13$ majd $52 = 4 \cdot 13$ tehát a legnagyobb közös osztó a 13.
■ **B:** példa arra, hogy valamelyik lépésben a negatív maradék a kisebb abszolút értékű és ezért azzal folytatjuk tovább az eljárást. A kiindulási számpár 595 és 721: $721 = 1 \cdot 595 + 126$; $595 = 5 \cdot 126 - 35$; $126 = 4 \cdot 35 - 14$; $35 = 2 \cdot 14 + 7$; $14 = 2 \cdot 7$, tehát a legnagyobb közös osztó a 7.

3. Lánctörtek

Legyen x_0 tetszőleges, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pedig pozitív valós számok. Az $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ véges lánctört definíció szerint az

$$x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}}. \tag{1.1}$$

emeletes tört; a feltétel biztosítja, hogy az alulról felfelé történő egyszerűbb alakra hozásnál fellépő minden nevező értelmes, azaz nem 0, hiszen még az utolsó előtti is pozitív. A lánctört egyszerű, ha még az is teljesül, hogy az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ számok egészek.

Nyilvánvalóan minden véges egyszerű lánctört egy racionális számot állít elő. Megfordítva, minden racionális szám megadható véges, egyszerű lánctörtként (pontosan kétféle módon).

■ **A:** $\dfrac{61}{27} = 2 + \dfrac{7}{27} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{7}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}} = [2; 3, 1, 6].$

Általában, ha u_0/u_1 egyszerűsített alakban felírt racionális szám — tehát u_0 és u_1 relatív prímek —, továbbá u_1-et pozitívnak választva az euklideszi algoritmussal (csak annyi a különbség, hogy ha u_0 negatív, akkor nem cseréljük ki az ellentettjére, hiszen most a keletkező hányadosokra van szükségünk) ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_1 a_0 + u_2, \quad 0 < u_2 < u_1\\
u_1 &= u_2 a_1 + u_3, \quad 0 < u_3 < u_2\\
u_2 &= u_3 a_2 + u_4, \quad 0 < u_4 < u_3\\
&\vdots\\
u_{j-1} &= u_j a_{j-1} + u_{j+1}, \quad 0 < u_{j+2} < u_j\\
u_j &= u_{j+1} a_j,
\end{aligned}$$

amiből látszik, hogy u_0/u_1 lánctört-kifejtése tényleg véges és

$$u_0/u_1 = [a_0, a_1, \ldots, a_j] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{j-1} + \cfrac{1}{a_j}}}}}.$$

Ha az $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ számsorozat végtelen, egészekből áll és $a_1, a_2, \ldots$ pozítivak, akkor az $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ végtelen egyszerű lánctört értékén a $\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ számot értjük. Az itteni $r_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ racionális szám a lántört n-edik szelete. Belátható, hogy $r_0 < r_2 < r_4 < \cdots < r_{2n} < \cdots \cdots r_{2j+1} < r_{2j-1} < \cdots < r_5 < r_3 < r_1$, továbbá $\lim_k (r_k - r_{k-1}) = 0$.

Emiatt $(r_0, r_1), (r_2, r_3), (r_4, r_5), \ldots$ egymásbaskatulyázott intervallumok végtelen sorozata, amelyeknek egyetlen közös eleme van, tehát a fenti $\lim_{n\to\infty} r_n$ tényleg létezik.

Ezek szerint bármely végtelen egyszerű lánctört meghatároz egy valós számot; ez a szám mindig irracionális. Megfordítva, bármely irracionális szám egyértelműen felírható végtelen egyszerű lánctörtként.

■ **B:** $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots = [1, 2, 2, 2, \ldots];$

■ **C:** $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots = [2, 4, 4, 4, \ldots].$

■ **D:** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180\ldots = [1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots].$

4. Összemérhetőség

Azt mondjuk, hogy két szám, a és b *összemérhető*, ha létezik egy harmadik c szám, amelynek mindketten egész számú többszörösei. Ekkor $a = mc$, $b = nc$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ miatt

$$\frac{a}{b} = x \quad \text{és } x \text{ racionális}. \tag{1.2}$$

Ellenkező esetben a és b *összemérhetetlen.*

■ **A:** A szabályos ötszögben az átlók és az oldalak összemérhetetlen szakaszok, arányuk a fenti $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, egyúttal az aranymetszés aránya. Ma úgy tudjuk, hogy a metapontumi HIPPASZOSZ (Kr. e. 450) ezen a példán fedezte fel az irracionális számokat.

■ **B:** A négyzet átlójának és oldalának hosszúsága összemérhetetlen, mert hányadosuk az irracionális $\sqrt{2}$ szám.

1.1.2. Bizonyítási módszerek

Lényegében háromféle bizonyítási módszert különböztetünk meg:
- direkt bizonyítás,
- indirekt bizonyítás,
- teljes indukció.

Ezenkívül konstruktív és nemkonstruktív bizonyításról is szokás beszélni, ha a bizonyítás célja valamilyen matematikai objektum létezésének belátása.

1.1.2.1. Direkt bizonyítás

Egy már helyesnek bizonyult tételből (p feltevés) indulunk ki, és ebből vezetjük le a bizonyítandó tétel (q állítás) igaz voltát. A logikai következtetés során főként az implikációt vagy az ekvivalenciát alkalmazzuk.

a) Direkt bizonyítás implikáció segítségével: A $p \Rightarrow q$ *implikáció* esetén a feltevés igaz voltából következik az állítás igaz volta (lásd az implikáció igazságtáblázata 4. sorát, 283. old.).

■ Bizonyítandó az $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ egyenlőtlenség, ahol $a \geq 0$, $b \geq 0$. A feltevés a helyesnek elfogadott $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ binomiális képlet. Innen $4ab$ kivonásával adódik $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$, ebből az egyenlőtlenségből pedig a középső kifejezés elhagyása, $4ab$ átvitele, és 4-gyel való osztás után közvetlenül az állítást kapjuk, ha a gyökvonásnál $a \geq 0$ és $b \geq 0$ miatt a pozitív előjelre szorítkozunk.

b) Direkt bizonyítás ekvivalencia segítségével: A bizonyítást *verifikálással*, vagyis a helyesség igazolásával végezzük. Ilyenkor a q állítás helyességéből indulunk ki, és megmutatjuk a p állítás helyességét, ami azonban csak a $p \Leftrightarrow q$ *ekvivalencia* fennállása esetén lehetséges. Ez pl. egy aritmetikai állításnál azt jelenti, hogy minden közbülső számolási lépésnek, amely a p állítást a q állításba viszi át, egyértelműen megfordíthatónak kell lennie.

■ Bizonyítandó az $1 + a + a^2 + \cdots + a^n < \dfrac{1}{1-a}$ egyenlőtlenség, ahol $0 < a < 1$.

Szorozva $(1-a)$-val kapjuk (mivel $1 - a > 0$, az egyenlőtlenségjel változatlanul érvényes, lásd még (1.97b)): $1 - a + a - a^2 + a^2 - a^3 + \cdots + a^n - a^{n+1} = 1 - a^{n+1} < 1$.

Mivel $0 < a^{n+1} < 1$, az így nyert egyenlőtlenség helyes, és minthogy a végrehajtott számolási műveletek egyértelműen megfordíthatók, azért a kiindulási egyenlőtlenség is helyes.

1.1.2.2. Indirekt (ellentmondással történő) bizonyítás

A q állítás bizonyítása céljából a $\bar{q}$ *tagadás*ból indulunk ki, és utóbbiból egy hamis r állításra következtetünk, vagyis $\bar{q} \Rightarrow r$ (lásd még 285. old.). Ekkor azonban $\bar{q}$ is hamis kell hogy legyen, mert implikáció útján csak hamis feltevésből juthatunk hamis állításra (lásd az implikáció igazságtáblázatának 1. sorát, 283. old.). De ha $\bar{q}$ hamis, akkor q igaz kell hogy legyen.

■ Bizonyítandó, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám. Tegyük fel indirekt, hogy $\sqrt{2}$ racionális. Ekkor $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ ahol a, b egész számok és $b \neq 0$. Feltehető, hogy itt az a, b számok *relatív prímek*, vagyis nincs közös osztójuk. Azt kapjuk, hogy $(\sqrt{2})^2 = 2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, azaz $a^2 = 2b^2$, tehát a^2 páros szám volna, ami csak akkor lehetséges, ha $a = 2n$ páros szám. Ekkor $a^2 = 4n^2 = 2b^2$ miatt b-nek is páros számnak kellene lennie. Ez nyilvánvalóan ellentmond annak a feltevésnek, hogy a és b relatív prímek.

1.1.2.3. Teljes indukció

Ezzel a bizonyítási módszerrel olyan tételeket vagy képleteket lehet bebizonyítani, amelyek természetes számoktól függnek. A teljes indukció elve a következő:
Ha egy állítás igaz egy n_0 természetes számra, és az állításnak bármely $n \geq n_0$ természetes számra való érvényességéből következik az állítás érvényessége az $n+1$ számra, akkor az állítás minden $n \geq n_0$ természetes számra igaz. Ezek szerint a bizonyítás a következő lépésekben történik:

1. Az indukció kezdete: Megmutatjuk az állítás érvényességét az $n = n_0$ esetben. Többnyire választható $n_0 = 1$.

2. Indukciós feltevés: n-re az állítás igaz (p feltevés).

3. Indukciós állítás: $(n+1)$-re az állítás igaz (q állítás).

4. Az implikáció bizonyítása: $p \Rightarrow q$.

A **3.** és **4.** lépést együtt *indukciós következtetés*nek vagy n-ről $(n+1)$-re való *következtetés*nek nevezzük.

■ Bizonyítandó az $s_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ képlet.

Az indukciós bizonyítás lépései a következők:

1. $n = 1: \ s_1 = \dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{1+1}$ nyilvánvalóan igaz.

2. $s_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ teljesüljön $n \geq 1$ esetén.

3. A **2.** alatti feltevés mellett meg kell mutatni, hogy $s_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

4. Bizonyítás: $s_{n+1} = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = s_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} =$
$\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

1.1.2.4. Konstruktív bizonyítás

Egy egzisztencia bizonyításról akkor mondják, hogy *konstruktív*, ha eljárást is ad a keresett matematikai objektum előállítására.

■ Konstruktív bizonyításra példa az euklideszi algoritmus, amely azáltal bizonyítja két egész szám legnagyobb közös osztójának létezését, hogy egy eljárást ad a tényleges előállításra.

1.1.2.5. Nemkonstruktív bizonyítás

Nemkonstruktív egzisztenciabizonyításra példa az ERDŐS PÁL által kezdeményezett ún. valószínűségi módszer, amellyel úgy bizonyítjuk például adott tulajdonságú gráf létezését, hogy leszámláljuk a keresett tulajdonsággal *nem* rendelkező gráfokat és a kapott felső becslés adja, hogy ezek nem lehetnek annyian, mint az összes szóbajövő gráf.

1.1.3. Összegek és szorzatok

1.1.3.1. Összegek

1. Definíció

Összegek rövid felírására a $\sum$ *szummajel*et használjuk:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{, kiejtve szumma } k \text{ egyenlő 1-től } n\text{-ig } a \text{ index } k \tag{1.3}$$

Ez a rövidítés n darab a_k tag $(k = 1, 2, \ldots, n)$ összegét jelöli. A k számot *futóindex*nek, a *szumma index*ének vagy *szummációs változó*nak nevezzük. Ha a szumma üres, azaz általánosabban $\sum_{k=l}^{n} a_l$ és $n < l$, akkor definíció szerint a szumma értéke 0.

2. Számolási szabályok

1. Egyenlő tagok összege , vagyis $a_k = a$, ha $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na\,. \tag{1.4a}$$

2. Szorzás konstans tényezővel

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k\,. \tag{1.4b}$$

3. Összeg felbontása

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \quad (1 \le m < n)\,. \tag{1.4c}$$

4. Egyenlő tagszámú összegek összeadása

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k + \ldots) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} c_k + \ldots \tag{1.4d}$$

(az egyenlőség két oldala felcserélhető).

5. Átszámozás

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{m+n-1} a_{k-m+1}\,, \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n-m+l} a_{k+m-l}\,. \tag{1.4e}$$

6. Összegzések sorrendjének megfordítása

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}\,. \tag{1.4f}$$

7. Az összegzések sorrendjének felcserélése kettős összegben

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,, \tag{1.4g}$$

azaz egy táblázat elemeit összeadhatjuk úgy is, hogy először a sorokat összegezzük és úgy is, hogy először az oszlopokat.

Megjegyzendő, hogy mindezek az összefüggések „balról-jobbra” és „jobbról-balra” is használatosak.

1.1.3.2. Szorzatok

1. Definíció

Szorzatok rövid felírására a $\prod$ *produktumjel*et használjuk:

$$a_1 a_2 \dots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \text{, kiejtve produktum } k \text{ egyenlő 1-től } n\text{-ig } a \text{ index } k \tag{1.5}$$

Ez a rövidítés n darab a_k tényező $(k = 1, 2, \dots, n)$ szorzatát jelöli. A k számot *futóindex*nek vagy a *produktum index*ének nevezzük. Itt az üres produktum értéke definíció szerint 1.

2. Számolási szabályok

1. Egyenlő tényezők szorzata , vagyis $a_k = a$, ha $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a^n \,. \tag{1.6a}$$

2. Konstans tényező kiemelése

$$\prod_{k=1}^{n} (c a_k) = c^n \prod_{k=1}^{n} a_k \,. \tag{1.6b}$$

3. Felbontás részszorzatokra

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{m} a_k \prod_{k=m+1}^{n} a_k \quad (1 \le m < n) \,. \tag{1.6c}$$

4. Egyenlő tagszámú szorzatok szorzata

$$\prod_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \dots = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k \prod_{k=1}^{n} c_k \dots \tag{1.6d}$$

(az egyenlőség két oldala felcserélhető).

5. Átszámozás

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{m+n-1} a_{k-m-+1} \,, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=l}^{n-m+l} a_{k+m-l} \,. \tag{1.6e}$$

6. Szorzat sorrendjének megfordítása

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{n+1-k}. \tag{1.6f}$$

7. A szorzások felcserélése kettős szorzatban

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_{ik} = \prod_{k=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} a_{ik}, \tag{1.6g}$$

lásd az előző alpont (1.1.3.1.) 7. szabálya utáni megjegyzést.

Látható, hogy a szummára és a produktumra vonatkozó szabályok páronként megfeleltethetők és természetesen ez utóbbiak is mindkét irányban használatosak.

1.1.4. Hatványok, gyökök, logaritmusok

1.1.4.1. Hatványok

A *hatványozás*t, mint műveletet az a^x írásmóddal jelöljük. Az a szám neve *alap*, x neve *kitevő*, végül a^x neve hatvány. A hatvány definícióját az **1.1. táblázat** adja meg. Hatványokra, figyelemmel az alap és a kitevő értelmezési tartományára, a következő **számolási szabályok** érvényesek:

1.1. táblázat. A hatvány definíciója

alap a	*kitevő x*	*hatvány a^x*
tetszőleges valós, $\neq 0$	0	1
	$n = 1, 2, 3, \ldots$	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tényező}}$ (a az n-ediken)
	$n = -1, -2, -3, \ldots$	$a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$
pozitív valós	racionális: $\dfrac{p}{q}$ (p, q egész, $q > 0$)	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ (q-adik gyök a a p-ediken)
	irracionális: $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_k}{q_k}$	$\lim\limits_{k\to\infty} a^{\frac{p_k}{q_k}}$
0	pozitív	0
0	0	1

$$a^x\, a^y = a^{x+y}, \quad a^x : a^y = a^{x-y} \quad (\text{ha } a^y \neq 0), \tag{1.7}$$

$$a^x\, b^x = (a\, b)^x, \quad a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad (\text{ha } b^x \neq 0), \tag{1.8}$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x\,y}, \tag{1.9}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \ \ (a > 0)\,. \tag{1.10}$$

Itt $\ln a$ az a szám természetes logaritmusa, és $e = 2{,}718281828459\ldots$ ennek a logaritmusnak az alapja. Egy speciális hatvány a következő:

$$(-1)^n = \begin{cases} +1, \text{ ha } n \quad \text{páros}, \\ -1, \text{ ha } n \text{ páratlan}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Ne felejtsük el, hogy $a^0 = 1$.

1.1.4.2. Gyökök

Az **1.1. táblázat**tal összhangban az

$$\sqrt[n]{a} \ \ (a > 0, \text{ valós; } n > 0, \text{ egész}) \tag{1.12a}$$

pozitív számot az a szám n-edik gyökének mondjuk. Kiszámításánál *gyökvonás*ról beszélünk, és az a számot *gyökjel alatti mennyiség*nek, n-et pedig *gyökkitevő*nek hívjuk. A 2. és a 3. gyököt *négyzetgyök*nek, ill. *köbgyök*nek is nevezzük.
Az

$$x^n = a \ \ (a \text{ valós vagy komplex}\,,\ n > 0\,,\ \text{egész}) \tag{1.12b}$$

egyenlet megoldását gyakran az $x = \sqrt[n]{a}$ alakban írjuk; ez az előállítás n számú x_k értéket képvisel, amelyeket negatív vagy komplex a érték esetén (1.133b) szerint (lásd 38. old.) kell kiszámítani.

■ Az $x^3 = -8$ egyenlet három gyöke $x_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $x_2 = -2$ és $x_3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1.1.4.3. Logaritmusok

1. Definíció Az $x > 0$ szám $b > 0$, $b \neq 1$ *alapra* vonatkozó *logaritmusán*, képletben: $u = \log_b x$, azt a kitevőt értjük, amelyre a b alapot hatványozni kell, hogy az x számot kapjuk. Tehát a

$b^u = x$ (1.13a) egyenletből következik $\log_b x = u$, (1.13b)

és megfordítva: a második egyenletből következik az első. Speciálisan

$$\log_b 1 = 0\,, \quad \log_b b = 1\,. \tag{1.13c}$$

A logaritmus negatív argumentumokra való kiterjesztéséhez a komplex számokra van szükség.
Egy adott mennyiség logaritmusának megállapítását *logaritmuskeresés*nek nevezzük. Így hívhatjuk még egy logaritmust tartalmazó kifejezésnek az (1.14a, 1.14b) képletek szerinti átalakítását is. Egy mennyiségnek logaritmusából való meghatározását *hatványozás*nak nevezzük.

2. A logaritmusok néhány tulajdonsága

1. Minden pozítiv számnak van tetszőleges pozítiv alapra vonatkozó logaritmusa, kivéve ha a b alap $= 1$.

2. Egy közös b alapra vonatkozó logaritmusokra a következő számolási szabályok érvényesek (az alapot most elhagytuk):

$$\log(xy) = \log x + \log y\,, \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y\,, \tag{1.14a}$$

$$\log x^n = n \log x\,, \quad \text{speciálisan} \ \log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log x\,. \tag{1.14b}$$

Ahhoz, hogy (1.14a, 1.14b) segítségével összegek és különbségek logaritmusát meg tudjuk keresni, először szorzattá vagy hányadossá kell őket átalakítani, ha lehet.

■ A $\dfrac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$ kifejezés logaritmusának meghatározása: $\log\frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3} = \log\left(3x^2\sqrt[3]{y}\right) - \log\left(2zu^3\right) =$
$= \log 3 + 2\log x + \dfrac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u.$

Gyakran van szükség a fordított átalakításra, vagyis különböző mennyiségek logaritmusait tartalmazó kifejezés előállítására egyetlen kifejezés logaritmusaként.

■ $\log 3 + 2\log x + \dfrac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u = \log\dfrac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$.

3. A különböző alapú logaritmusok arányosak egymással, úgyhogy az a alapra vonatkozó logaritmusok így számíthatók ki b alapú logaritmusok segítségével:

$$\log_a x = M \log_b x, \ \text{ ahol } \ M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\,. \tag{1.15}$$

Az M számot transzformációs modulusnak is hívják.

1.1.4.4. Speciális logaritmusok

1. A 10 alapszámra vonatkozó logaritmusokat *tízes alapú* vagy BRIGGS-*féle logaritmusok*nak nevezzük. Jelölésük:

$$\log_{10} x = \lg x\,, \ \text{ és fennáll } \ \lg(x10^\alpha) = \alpha + \lg x\,. \tag{1.16}$$

2. Az e alapszámra vonatkozó logaritmusokat *természetes* vagy NAPIER-*féle logaritmusok*nak nevezzük. Jelölésük:

$$\log_e x = \ln x\,. \tag{1.17}$$

A természetes logaritmusokat tízes alapúakba átvivő modulus

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}4342944819\ldots\,, \tag{1.18}$$

a tízes alapúakat a természetesekbe átvivő pedig

$$M_1 = \frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}3025850930\ldots\,. \tag{1.19}$$

3. A 2 alapszámra vonatkozó logaritmusokat *kettes alapú logaritmusok*nak nevezzük. Jelölésük:

$$\log_2 x = \operatorname{ld} x \quad (\text{néha} \ \ \log_2 x = \operatorname{lb} x)\,. \tag{1.20}$$

4. A tízes alapú és a természetes logaritmusokról *logaritmustáblázatok* állnak rendelkezésre. Ezeket korábban előszeretettel alkalmazták hatványok kiszámolására vagy szorzások és osztások elvégzésének megkönnyítésére. Legtöbbször a tízes alapú logaritmusokat használták erre a célra. Mára a zsebszámológépek és személyi számítógépek a logaritmustáblázatokat nagy mértékben kiszorították a számolás eszközei közül.

Minden pozitív tizedes tört, vagyis minden valós szám (ebben az összefüggésben *numerus*nak is mondják) egy k egész kitevőjű 10^k tízes hatvány kiemelésével előállítható az

$$x = \hat{x}10^k, \ \text{ahol} \ 1 \le \hat{x} < 10 \tag{1.21a}$$

félig logaritmikus alakban. Itt az $\hat{x}$ mennyiséget x számjegyeinek sorozata határozza meg, 10^k pedig x nagyságrendjét szolgáltatja. Azt kapjuk, hogy

$$\lg x = k + \lg \hat{x}, \quad \text{ahol} \quad 0 \le \lg \hat{x} < 1, \quad \text{vagyis} \quad \lg \hat{x} = 0,\ldots\,. \tag{1.21b}$$

A k számot *karakterisztiká*nak, $\lg \hat{x}$ tizedesvessző után álló számjegysorozatát pedig *mantisszá*nak nevezzük. Utóbbit a logaritmustáblázatból lehet leolvasni.

■ $\lg 324 = 2{,}5105$, tehát a karakterisztika 2, a mantissza 5105. A 10^n-nel való szorzással vagy osztással keletkező számok, pl. 3240; $324\,000$; $3{,}24$; $0{,}0324$, logaritmusának mantisszája ugyanaz, esetünkben 5105, de karakterisztikája különböző. Ezért a *logaritmustáblázat*okban a mantisszák vannak feltüntetve. A mantissza leolvasásánál sem a tizedesvessző helyét, sem a számtól balra vagy jobbra álló nullákat (beleértve a tizedesvessző előtti nullát) nem kell figyelembe venni. Ezek meghatározott x numerushoz tartozó k karakterisztika megállapításánál játszanak szerepet.

A logaritmuson kívül igen fontos számolási segédeszköz volt a *logarléc*. A logarléc működésének alapja az (1.14a) képlet, amely lehetővé teszi, hogy szorzásokat és osztásokat összeadás és kivonás útján végezzünk el. Ezért a logarlécen a szakaszok logaritmikus léptékben vannak feltüntetve (lásd Skála- és függvénypapírok, 118. old.), úgyhogy az említett számolási műveletek szakaszok „összeadására” és „kivonására” vezethetők vissza.

1.1.5. Algebrai kifejezések

1.1.5.1. Definíciók

1. Algebrai kifejezésnek nevezünk egy vagy több algebrai mennyiséget, pl. számot vagy betűszimbólumot, amelyeket műveleti jelek, pl. $+, -, \cdot, :, \sqrt{\ }$ stb., valamint az algebrai műveletek végrehajtási sorrendjének meghatározására szolgáló különféle zárójelek kapcsolnak össze.

2. Azonosság az olyan egyenlőségi kapcsolat két algebrai kifejezés között, amely érvényben marad, ha a benne szereplő betűszimbólumokat tetszőleges számértékekkel helyettesítjük.

3. Egyenletnek nevezünk egy egyenlőségi kapcsolatot két algebrai kifejezés között, ha a kapcsolat (az azonosság esetétől eltérően) csak egyes speciális értékek behelyettesítése esetén marad érvényes. Például az egyazon változó két függvénye közötti

$$F(x) = f(x) \tag{1.22}$$

egyenlőségi kapcsolatot akkor mondjuk *egyismeretlenes egyenlet*nek, ha csak a változó meghatározott értékei mellett teljesül. Ha az egyenlőségi kapcsolat az x változó tetszőleges értéke mellett igaz marad, akkor azonosságnak nevezzük, vagy azt mondjuk, hogy az egyenlet azonosan teljesül.

4. Azonos átalakítás algebrai kifejezést másik, vele azonosan egyenlő kifejezésbe visz át. Az ilyen átalakítások a követett céltól függően különbözők lehetnek. Például segítségükkel rövidebb kifejezéseket nyerhetünk, és így könnyebben helyettesíthetünk be számokat vagy végezhetünk további számolásokat. Máskor olyan átalakításra van szükségünk, amelynek végeredménye különösen alkalmas egyenletmegoldásra, logaritmuskeresésre, differenciálásra, integrálásra stb.

1.1.5.2. Az algebrai kifejezések osztályozása

1. Főmennyiségek *Főmennyiségek*nek nevezzük azokat az általános számokat (betűszimbólumokat), amelyek szerint az algebrai kifejezések osztályozása történik; ezeket minden egyes esetben külön kell megállapítani. Függvények esetén a független változók a főmennyiségek. A többi, számokkal még be nem helyettesített mennyiségek a kifejezés *paraméter*ei. Egyes kifejezésekben a paramétereket *együtthatók*nak nevezik.

■ Együtthatók lépnek fel pl. polinomokban, FOURIER-sorokban és lineáris differenciálegyenletekben.

Egy kifejezés attól függően tartozik az egyik vagy másik osztályhoz, hogy főmennyiségein milyen műveleteket kell végrehajtani. A főmennyiségeket többnyire az ábécé utolsó betűivel: x, y, z, u, v, ..., a paramétereket az első betűkkel: a, b, c, ... jelöljük. Az m, n, p, ... betűket pozitív egész paraméterértékekre, pl. összegzési és iterációs indexekre használjuk leginkább.

2. Racionális egész kifejezések azok, amelyekben a főmennyiségek összeadása, kivonása és szorzása, beleértve a nemnegatív egész kitevőjű hatványozást, fordul csak elő.

3. Racionális törtkifejezések a racionális egész kifejezéseknél említett műveleteken kívül a főmennyiségekkel való osztást is tartalmaznak, beleértve a negatív egész kitevőjű hatványozást és esetenként a főmennyiségek racionális egész kifejezéseivel való osztást.

4. Irracionális kifejezések jellemzője a gyökvonás, vagyis a törtkitevőjű hatványozás, pontosabban a főmennyiségek racionális egész vagy törtkifejezéseiből való gyökvonás.

5. Transzcendens kifejezések, vagyis exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus kifejezések: olyan algebrai kifejezéseket tartalmaznak, amelyeknél a főmennyiségek kitevőben, logaritmusjel alatt vagy szögfüggvények argumentumaként szerepelnek.

1.1.6. Racionális egész kifejezések

1.1.6.1. Előállítás polinomalakban

Minden racionális egész kifejezést elemi átalakítások, vagyis egynemű tagok összevonása, egytagú kifejezések és polinomok összeadása, kivonása és szorzása révén polinomként lehet előállítani.

■ $(-a^3 + 2a^2x - x^3)(4a^2 + 8ax) + (a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4) - (a^5 + 4a^3x^2 - 4ax^4) =$
$= -4a^5 + 8a^4x - 4a^2x^3 - 8a^4x + 16a^3x^2 - 8ax^4 + a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4 - a^5 - 4a^3x^2 + 4ax^4 =$
$= -5a^5 + 13a^3x^2 - 2a^2x^3 - 8ax^4\,.$

1.1.6.2. Polinom felbontása tényezőkre

A polinomok sok esetben előállíthatók egytagú kifejezések és polinomok szorzataként. Ehhez segédeszközül a *kiemelés* és *csoportosítás*, speciális képletek, továbbá az *egyenletek általános tulajdonságai* szolgálnak.

■ **A:** Kiemelés: $8ax^2y - 6bx^3y^2 + 4cx^5 = 2x^2(4ay - 3bxy^2 + 2cx^3)$.

■ **B:** Csoportosítás: $6x^2 + xy - y^2 - 10xz - 5yz = 6x^2 + 3xy - 2xy - y^2 - 10xz - 5yz =$
$= 3x(2x + y) - y(2x + y) - 5z(2x + y) = (2x + y)(3x - y - 5z)$.

■ **C:** Egyenlettulajdonságok alkalmazása (lásd még 42. old.): $P(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2$.
a) x^2 kiemelése, **b)** annak megállapítása, hogy $\alpha_1 = 1$ és $\alpha_2 = -1$ a $P(x) = 0$ egyenletnek gyökei. $P(x)$-et elosztva az $x^2(x-1)(x+1) = x^4 - x^2$ kifejezéssel az $x^2 - 2x + 5$ hányadost kapjuk. Ezt már nem lehet további valós tényezőkre felbontani, mert $p = -2$, $q = 5$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$, tehát adódik: $x^6 - 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 = x^2(x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 5)\,.$

1.1.6.3. Speciális képletek

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2\,, \tag{1.23}$$

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz\,, \tag{1.24}$$

$$(x+y+z+\cdots+t+u)^2 = x^2+y^2+z^2+\cdots+t^2+u^2+$$
$$+2xy+2xz+\cdots+2xu+2yz+\cdots+2yu+\cdots+2tu\,, \tag{1.25}$$
$$(x\pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y+3xy^2 \pm y^3\,. \tag{1.26}$$

Az $(x \pm y)^n$ kifejezést a binomiális tétellel lehet kiszámítani (lásd (1.31a)–(1.31d)).

$$(x+y)(x-y) = x^2-y^2\,, \tag{1.27}$$
$$\frac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}\,, \tag{1.28}$$
$$\frac{x^n+y^n}{x+y} = x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1} \quad \text{(csak páratlan } n\text{-re)}\,, \tag{1.29}$$
$$\frac{x^n-y^n}{x+y} = x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1} \quad \text{(csak páros } n\text{-re)}\,. \tag{1.30}$$

1.1.6.4. Binomiális tétel

1. Első binomiális képlet Az

$$(a+b)^n = a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m+\cdots+nab^{n-1}+b^n \tag{1.31a}$$

képletet *binomiális tétel*nek nevezzük. A tétel minden valós vagy komplex a és b számra, továbbá minden $n = 1, 2, \ldots$ értékre érvényes. A rövidebb írásmód kedvéért speciális együtthatókat vezettek be, a *binomiális együtthatók*at (lásd (1.32a)):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2\,!+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n \tag{1.31b}$$

azaz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\,. \tag{1.31c}$$

2. Második binomiális képlet Ha az (1.31a)–(1.31c) képletekben a b számot a $-b$ számmal helyettesítjük, kapjuk a *második binomiális képlet*et:

$$(a-b)^n = a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+$$
$$+\cdots+(-1)^m\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m+\cdots+(-1)^nb^n \text{ vagy}$$
$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k a^{n-k}b^k\,. \tag{1.31d}$$

3. Binomiális együtthatók Ha n és k nemnegatív egész szám, az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (0 \le k \le n)\,. \tag{1.32a}$$

kifejezést *binomiális együtthatóna*k nevezzük. Itt $n!$ a pozitív egész számok szorzata 1-től n-ig, amelyet *faktoriális*nak hívunk:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{1.32b}$$

Definícióként

$$0! = 1\,. \tag{1.32c}$$

A binomiális együtthatók értékét az úgynevezett PASCAL-*háromszög*ből lehet leolvasni:

n	Együtthatók													
0							1							
1						1		1						
2					1		2		1					
3				1		3		3		1				
4			1		4		6		4		1			
5		1		5		10		10		5		1		
6	1		6		15		20		15		6		1	
	$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$	
6	$\binom{6}{0}$		$\binom{6}{1}$		$\binom{6}{2}$		$\binom{6}{3}$		$\binom{6}{4}$		$\binom{6}{5}$		$\binom{6}{6}$	
$\vdots$	. . .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	. .

Minden sorban az első és az utolsó szám definíció szerint 1; az elrendezésben szereplő minden más együtthatóérték a fölötte balra és jobbra álló szám összegeként adódik. A binomiális együtthatókat a következő képletek segítségével lehet kiszámítani:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,, \tag{1.33a}$$

$$\binom{n}{0} = 1\,, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1\,. \tag{1.33b}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k}{k}. \tag{1.33c}$$

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k}. \tag{1.33d}$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}. \tag{1.33e}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{1.33f}$$

Megjegyzés: Tetszőleges valós α számra a binomiális együttható kiterjesztett definíciója a következő:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k > 0,\ \text{egész})\,,$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1\,. \tag{1.34}$$

■ $\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!} = -\frac{5}{16}\,.$

4. A binomiális együtthatók tulajdonságai

- A binomiális együtthatók az (1.31a) binomiális képlet közepéig növekszenek, onnan kezdve pedig csökkennek.
- Azon tagok binomiális együtthatója, amelyek a binomiális képlet elejétől, ill. végétől egyenlő távolságra vannak, egymással egyenlő.
- Az n kitevőhöz tartozó binomiális képletben a binomiális együtthatók összege 2^n .
- A páratlan sorszámú helyen álló binomiális együtthatók összege egyenlő a páros sorszámú helyen állók összegével.

5. Binomiális sor A binomiális tétel (1.31a) képletét negatív és törtkitevőkre is ki lehet terjeszteni. A $|b| < a$ esetben $(a+b)^x$ értékét (1.31c) mintájára egy konvergens végtelen sor, a *binomiális sor* (lásd még 1042. old.) adja meg:

$$(a+b)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} a^{x-k} b^k = a^x + x a^{x-1} b + \frac{x(x-1)}{2!} a^{x-2} b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} a^{x-3} b^3 + \cdots . \tag{1.35}$$

1.1.6.5. Két polinom legnagyobb közös osztójának meghatározása

1. Osztó és többszörös A $P(x)$ polinom osztható a $Q(x)$ $(Q(x) \not\equiv 0)$ polinommal, ha létezik olyan $T(x)$ polinom, amelyre

$$P(x) = T(x)Q(x) \quad \text{és ekkor} \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) \tag{1.36}$$

Ha a $P(x)$ polinom osztható a $Q(x)$ polinommal, akkor azt mondjuk, hogy $Q(x)$ a $P(x)$-nek *osztó*ja, és hogy $P(x)$ a $Q(x)$-nek *többszöröse*.

2. Legnagyobb közös osztó Minden polinomot, amely a $P(x)$ és a $Q(x)$ polinom közös osztója, és amely ugyanakkor e két polinom minden más közös osztójának többszöröse, a $P(x)$ és a $Q(x)$ polinom *legnagyobb közös osztó*jának nevezünk és $\mathrm{LNKO}(P,Q)$-val jelölünk.

■ $P(x) = (x-1)^2(x-2)(x-4)\,,\ Q(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3) \Rightarrow \mathrm{LNKO}(P,Q) = (x-1)^2(x-2)\,.$

Ha $P(x)$-nek és $Q(x)$-nek nincs közös polinomtényezője, akkor *relatív prímek*nek mondjuk őket. Ilyenkor a legnagyobb közös osztó bármely konstans.

3. Euklideszi algoritmus Az *euklideszi algoritmus* két polinom, $P(x)$ és $Q(x)$ legnagyobb közös osztójának meghatározására szolgáló módszer. $P(x)$ legyen n-edfokú, $Q(x)$ pedig m-edfokú, és tegyük fel, hogy $n \ge m \ge 0$. Elvégezzük a következő osztásokat:

a) A $P(x)$ polinomot elosztva a $Q(x)$ polinommal egy $T_1(x)$ hányadost és egy $R_1(x)$ maradékot kapunk:

$$P(x) = Q(x)T_1(x) + R_1(x)\,. \tag{1.37a}$$

b) A $Q(x)$ polinomot elosztva az $R_1(x)$ polinommal egy $T_2(x)$ hányadost és egy $R_2(x)$ maradékot kapunk:

$$Q(x) = R_1(x)T_2(x) + R_2(x), \tag{1.37b}$$

c) Az $R_1(x)$ polinomot elosztva az $R_2(x)$ polinommal egy $T_3(x)$-et és egy $R_3(x)$-et kapunk, stb. Ekkor a két polinom legnagyobb közös osztója az utolsó, 0-tól különböző $R_k(x)$ maradék. A módszer a természetes számok aritmetikájából ismert (lásd 328. old.).

A legnagyobb közös osztó meghatározása pl. egyenletek megoldása során használható, nevezetesen a többszörös gyökök leválasztásánál és a STURM-*módszer* alkalmazásánál (lásd 44. old.).

1.1.7. Racionális törtkifejezések

1.1.7.1. Visszavezetés a legegyszerűbb alakra

Minden racionális törtkifejezés felírható két relatív prím polinom hányadosaként. Ehhez csak elemi átalakításokra van szükség, nevezetesen polinomok és törtek összeadására, kivonására, szorzására és osztására, valamint törtek egyszerűsítésére.

■ $\dfrac{3x + \dfrac{2x+y}{z}}{x\left(x^2 + \dfrac{1}{z^2}\right)} - y^2 + \dfrac{x+z}{z}$ legegyszerűbb alakjának megkeresése:

$\dfrac{(3xz + 2x + y)z^2}{(x^3z^2 + x)z} + \dfrac{-y^2z + x + z}{z} = \dfrac{3xz^3 + 2xz^2 + yz^2 + (x^3z^2 + x)(-y^2z + x + z)}{x^3z^3 + xz} =$

$\dfrac{3xz^3 + 2xz^2 + yz^2 - x^3y^2z^3 - xy^2z + x^4z^2 + x^2 + x^3z^3 + xz}{x^3z^3 + xz}$. Itt a számláló és a nevező már relatív prímek, mert az xz tag a nevezőben is szerepel.

1.1.7.2. A racionális egész rész meghatározása

Két, közös x főmennyiséggel rendelkező polinom hányadosát *valódi tört*nek nevezzük, ha a számlálóban álló polinom alacsonyabb fokú, mint a nevezőben álló. Ellenkező esetben *áltört*ről beszélünk. Minden áltört felbontható egy valódi tört és egy polinom összegére azáltal, hogy a számlálópolinomot elosztjuk a nevezőpolinommal, vagyis leválasztjuk a racionális egész részt, tehát a különbség 0-hoz tart és emiatt az aszimptotikus közelítés az aszimptota általánosítása.

■ $R(x) = \dfrac{3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4}{x^2 - 2ax + 3a^2}$ racionális egész részének meghatározása:

$$(3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4) : (x^2 - 2ax + 3a^2) = 3x^2 - 4ax + 5a^2 + \frac{-2a^3x - 5a^4}{x^2 - 2ax - 3a^2}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
3x^4 & -6ax^3 & +9a^2x^2 & & \\
\hline
 & -4ax^3 & +13a^2x^2 & -24a^3x & \\
 & -4ax^3 & +8a^2x^2 & -12a^3x & \\
\hline
 & & 5a^2x^2 & -12a^3x & +10a^4 \\
 & & 5a^2x^2 & -10a^3x & +15a^4 \\
\hline
 & & & -2a^3x & -5a^4.
\end{array}$$

$$R(x) = 3x^2 - 4ax + 5a^2 + \frac{-2a^3x - 5a^4}{x^2 - 2ax + 3a^2}.$$

Egy $R(x)$ racionális áltört függvény racionális egész részét $R(x)$ *aszimptotikus közelítés*ének is mondjuk, mert $|x|$ nagy értékeire $R(x)$ úgy viselkedik, mint ez a polinomiális rész.

1.1.7.3. Parciális törtekre bontás

Minden

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0} \quad (n < m) \tag{1.38}$$

racionális valódi törtfüggvény egyértelműen felbontható

$$\frac{A}{x - \alpha^k} \quad \text{és} \quad \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^m} \tag{1.39}$$

alakú parciális törtek összegére, ahol α, p, q és A, C, D valós számok. Ezt a következőképpen érjük el:

1. A nevezőpolinom b_m együtthatóját 1-re változtatjuk azáltal, hogy (1.38) nevezőjét és számlálóját elosztjuk b_m eredeti értékével.

2. A (1.160) képlet (lásd 43. old.) szerint felírjuk a $Q(x)$ nevezőpolinom gyöktényezős előállítását:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_l)^{k_l} \\ &\quad \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdots (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}\,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Itt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ a $Q(x)$ polinom l darab valós gyöke. Ezeken kívül $Q(x)$-nek van r pár konjugált komplex zérushelye is, amelyek az $x^2 + p_ix + q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ másodfokú tényezők gyökeiként adódnak. A p_i, q_i számok valósak, és fennáll $\left(\dfrac{p_i}{2}\right)^2 - q_i < 0\,.$

3. A *parciális törtekre bontás* próbakifejezése a következő:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{m_2} \cdots} \\ &= \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - \alpha_1)^{k_1}} + \cdots \\ &\quad \frac{B_1}{x - \alpha_2} + \frac{B_2}{(x - \alpha_2)^2} + \cdots + \frac{B_{k_2}}{(x - \alpha_2)^{k_2}} + \cdots \end{aligned}$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{C_{m_1}x+D_{m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\cdots$$
$$+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\cdots+\frac{E_{m_2}x+F_{m_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}}+\cdots. \tag{1.41}$$

4. Az $A_1, A_2, \dots, F_1, F_2 \dots$ konstansok meghatározása céljából az (1.41) próbakifejezést megszorozzuk a $Q(x)$ polinommal, majd összehasonlítjuk $P(x)$-et és a most kapott $Z(x)$ polinomot. Fennáll $Z(x) \equiv P(x)$. A $Z(x)$ polinomot x hatványai szerint rendezzük, majd $Z(x)$ és $P(x)$ azonos hatványainak együtthatóit egyenlővé tesszük (*együttható-összehasonlítás* vagy a *határozatlan együtthatók módszere*).

■ **A:** $\dfrac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}=\dfrac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x^2-1)}$.
Az egyenlet bal és jobb oldalának számlálójában x azonos hatványainak együtthatóit egyenlővé téve a $6=A+B+C$, $-1=B-C$, $1=-A$, egyenletrendszert kapjuk, amelynek megoldása $A=-1$, $B=3$, $C=4$.

■ **B:** $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}=\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{B_1}{x-1}+\dfrac{B_2}{(x-1)^2}+\dfrac{B_3}{(x-1)^3}$. Az A_1, B_1, B_2, B_3 együtthatók meghatározása a határozatlan együtthatók módszerével történik.

■ **C:** $\dfrac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{D_1x+E_1}{x^2-x+1}+\dfrac{D_2x+E_2}{(x^2-x+1)^2}$. Az A, D_1, E_1, D_2, E_2 együtthatók meghatározása a határozatlan együtthatók módszerével történik.

Megjegyzés: Ha a $Q(x)$ nevezőpolinomnak csak az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ valós és egyszeres gyökei vannak, akkor az (1.41) próbakifejezés alakja

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{A_m}{x-\alpha_m}, \tag{1.42}$$

és az együtthatók a következőképpen határozhatók meg:

$$A_1=\frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)},\quad A_2=\frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)},\quad \dots,\quad A_m=\frac{P(\alpha_m)}{Q'(\alpha_m)}. \tag{1.43}$$

(1.43) nevezőiben a $\dfrac{dQ}{dx}$ derivált $x=\alpha_1, x=\alpha_2, \dots, x=\alpha_m$ helyeken felvett értékei állnak.

■ $\dfrac{6x^2-x+1}{x^3-x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=+1$ és $\alpha_3=-1$; $P(x)=6x^2-x+1$, $Q'(x)=$ $=3x^2-1$, $A=\dfrac{P(0)}{Q'(0)}=-1$, $B=\dfrac{P(1)}{Q'(1)}=3$ és $C=\dfrac{P(-1)}{Q'(-1)}=4$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x+1}$.
Ugyanaz a megoldás adódik, mint az **A** példában.

1.1.7.4. Arányosságok átalakítása

Az

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{(1.44a) arányosságból következik} \quad ad=bc,\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a},\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \tag{1.44b}$$

és az

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\quad \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c},\quad \frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d}\quad \text{és } a\neq b,\ c\neq d \text{ esetén } \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \tag{1.44c}$$

levezetett arányosságok. Az

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \tag{1.45a}$$

arányosságokból $b_1+b_2+\cdots+b_n\neq 0$ esetén következik

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}\,. \qquad (1.45b)$$

1.1.8. Irracionális kifejezések

Az irracionális kifejezések általában egyszerűbb alakra hozhatók, mégpedig a) a kitevő egyszerűsítésével, b) a gyökjel elé történő kiemeléssel és c) a nevező gyöktelenítésével.

1. A kitevő egyszerűsítése A *kitevő*t úgy lehet *egyszerűsíteni*, hogy a gyökjel alatt álló mennyiséget tényezőkre bontjuk, majd a gyökkitevőt és a gyökjel alatt álló mennyiség minden tényezőjének kitevőjét elosztjuk ezen összes kitevő legnagyobb közös osztójával.

■ $\sqrt[6]{16(x^{12} - 2x^{11} + x^{10})} = \sqrt[6]{4^2 \cdot x^{5\cdot 2}(x-1)^2} = \sqrt[3]{4x^5(x-1)}\,.$

2. A nevező gyöktelenítése A *nevező gyöktelenítésé*re különböző módszerek vannak, amelyekben az a közös, hogy bővítjük a törtet.

■ **A:** $\sqrt{\dfrac{x}{2y}} = \sqrt{\dfrac{2xy}{4y^2}} = \dfrac{\sqrt{2xy}}{2y}\,.$ ■ **B:** $\sqrt[3]{\dfrac{x}{4yz^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2xy^2z}{8y^3z^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{2xy^2z}}{2yz}$, tehát azonos átalakításokkal megpróbáljuk a nevezőt ugyanannyiadik hatványra átírni, ahányadik gyököt kell vonni.

■ **C:** $\dfrac{1}{x+\sqrt{y}} = \dfrac{x-\sqrt{y}}{\left(x+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{y}\right)} = \dfrac{x-\sqrt{y}}{x^2-y}\,.$

■ **D:** $\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{y}} = \dfrac{x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}{\left(x+\sqrt[3]{y}\right)\left(x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}\right)} = \dfrac{x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}{x^3+y}$, tehát az 1.1.6.3. speciális képleteket felhasználva bővítünk.

3. A hatványok és gyökök legegyszerűbb alakja Rendszerint a hatványokat és gyököket is a legegyszerűbb alakra hozzuk.

■ **A:** $\sqrt[4]{\dfrac{81x^6}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^4}} = \sqrt{\dfrac{9x^3}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2}} = \dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \dfrac{3x\sqrt{x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{2-x} = \dfrac{3x\sqrt{2x}+3x^2}{2-x}\,.$

■ **B:** $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[12]{x^7}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} - \sqrt[12]{x^5}\right) = (x^{1/2} + x^{2/3} + x^{3/4} + x^{7/12})(x^{1/2} - x^{1/3} + x^{1/4} - x^{5/12}) = x + x^{7/6} + x^{5/4} + x^{13/12} - x^{5/6} - x - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} + x^{11/12} + x + x^{5/6} - x^{11/12} - x^{13/12} - x^{7/6} - x = x^{5/4} - x^{13/12} - x^{11/12} + x^{3/4} = \sqrt[4]{x^5} - \sqrt[12]{x^{13}} - \sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}(1 - x^{1/6} - x^{1/3} + x^{1/2}) = \sqrt[4]{x^3}\,(1 - \sqrt[6]{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x})\,.$

1.2. Véges sorok

1.2.1. A véges sor definíciója

Véges soron az

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \qquad (1.46)$$

összeget értjük, amelynek az összeadandóit általában egy meghatározott szabály szerint kell képezni. Az a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ összeadandók számok, amelyeket a sor tagjainak nevezünk.

1.2.2. Számtani sorok

1. Elsőrendű számtani sor

az olyan (1.46) sor, amelynél két egymást követő összeadandó különbsége konstans, vagyis

$$\Delta a_i = a_{i+1} - a_i = d = \text{const}\,, \quad \text{tehát} \quad a_i = a_0 + id\,. \qquad (1.47a)$$

Ennélfogva

$$s_n = a_0 + (a_0 + d) + (a_0 + 2d) + \cdots + (a_0 + nd), \tag{1.47b}$$

$$s_n = \frac{a_0 + a_n}{2}(n+1) = \frac{n+1}{2}(2a_0 + nd)\,. \tag{1.47c}$$

2. k-adrendű számtani sor

az olyan sor, amelynél az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozat k-adik differenciáiból, a $\Delta^k a_i$ számokból álló sorozat konstans. A magasabbrendű differenciákat rekurzív módon, a

$$\Delta^\nu a_i = \Delta^{\nu-1} a_{i+1} - \Delta^{\nu-1} a_i \quad (\nu = 2, 3, \ldots, k) \tag{1.48a}$$

előírás alapján képezzük. Ezek könnyen nyerhetők a következő *differenciasémá*ból (háromszög-elrendezésből):

$$\begin{array}{lllllll}
a_0 & & & & & & \\
 & \Delta a_0 & & & & & \\
a_1 & & \Delta^2 a_0 & & & & \\
 & \Delta a_1 & & \Delta^3 a_0 & & & \\
a_2 & & \Delta^2 a_1 & & \ddots\ \Delta^k a_0 & & \\
 & \Delta a_2 & & \Delta^3 a_1 & & & \\
a_3 & & \Delta^2 a_2 & & \ddots\ \Delta^k a_1 & \ddots & \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \Delta^n a_0 \\
\vdots & & \vdots & & \Delta^k a_{n-k} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
 & & & \Delta^3 a_{n-3}\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\
 & & \Delta^2 a_{n-2} & & & & \\
 & \Delta a_{n-1} & & & & & \\
a_n\,. & & & & & &
\end{array} \tag{1.48b}$$

Ekkor a tagokra és az összegre fennáll

$$a_i = a_0 + \binom{i}{1}\Delta a_0 + \binom{i}{2}\Delta^2 a_0 + \cdots + \binom{i}{k}\Delta^k a_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{1.48c}$$

$$s_n = \binom{n+1}{1} a_0 + \binom{n+1}{2}\Delta a_0 + \binom{n+1}{3}\Delta^2 a_0 + \cdots + \binom{n+1}{k+1}\Delta^k a_0\,. \tag{1.48d}$$

1.2.3. Mértani sor

Az (1.46) összeget *mértani sor*nak nevezzük, ha két egymást követő tag hányadosa konstans, vagyis ha

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q = \text{const}, \quad \text{tehát} \quad a_i = a_0 q^i\,. \tag{1.49a}$$

Ekkor

$$s_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^n = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{ha} \quad q \neq 1\,, \tag{1.49b}$$

$$s_n = (n+1) a_0 \quad \text{ha} \quad q = 1\,. \tag{1.49c}$$

Ha a sor végtelen sok tagból áll, akkor *végtelen mértani sor*t kapunk, amelynek $|q| < 1$ esetén az összege

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_0}{1 - q}\,. \tag{1.49d}$$

1.2.4. Speciális véges sorok

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}\,, \tag{1.50}$$

$$p+(p+1)+(p+2)+\cdots+(p+n)=\frac{(n+1)(2p+n)}{2}\,, \tag{1.51}$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2\,, \tag{1.52}$$

$$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1)\,, \tag{1.53}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \tag{1.54}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\,, \tag{1.55}$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}\,, \tag{1.56}$$

$$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)\,, \tag{1.57}$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\,, \tag{1.58}$$

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\quad(x\neq 1)\,. \tag{1.59}$$

1.2.5. Középértékek

(lásd még 794. old. és 811. old.)

1.2.5.1. Számtani közép

Az n számú $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mennyiség számtani közepének az

$$x_A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \tag{1.60a}$$

kifejezést nevezzük. Két mennyiség, a és b esetén kapjuk:

$$x_A=\frac{a+b}{2} \tag{1.60b}$$

Az a , x_A , b mennyiségek számtani sorozatot alkotnak.

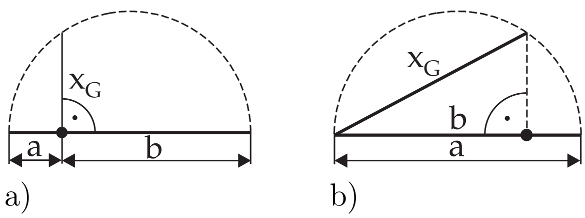
1.2.5.2. Mértani közép

Az n számú nem negatív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mennyiség mértani közepének az

$$x_G=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{1.61a}$$

kifejezést nevezzük. Két mennyiség, a és b esetén kapjuk:

$$x_G=\sqrt{ab}\,. \tag{1.61b}$$



1.3. ábra.

Az a, x_G , b mennyiségek mértani sorozatot alkotnak. Ha a és b két megadott szakasz, akkor egy $x_G=\sqrt{ab}$ hosszúságú szakaszt az **1.3.a** vagy az **1.3.b ábrán** feltüntetett szerkesztéssel lehet meghatározni.

Egy szakasznak az aranymetszés arányában történő felosztása (lásd 192. old.) a mértani közép speciális esete.

1.2.5.3. Harmonikus közép

Az n számú pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mennyiség harmonikus közepének az

$$x_H = \left[\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n})\right]^{-1} = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right]^{-1}. \tag{1.62a}$$

kifejezést nevezzük. Két mennyiség, a és b esetén kapjuk:

$$x_H = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}, \quad x_H = \frac{2ab}{a+b}. \tag{1.62b}$$

1.2.5.4. Négyzetes közép

Az n számú a_1 , a_2 , ... , a_n mennyiség négyzetes közepének az

$$x_Q = \sqrt{\frac{1}{n}({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^2}. \tag{1.63a}$$

kifejezést nevezzük. Két mennyiség, a és b esetén kapjuk:

$$x_Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \tag{1.63b}$$

A *négyzetes közép*nek a megfigyelési hibák elméletében van jelentősége.

1.2.5.5. A középértékek összehasonlítása két pozitív $a \leq b$ mennyiség esetén

Az $x_A = \dfrac{a+b}{2}$, $x_G = \sqrt{ab}$, $x_H = \dfrac{2ab}{a+b}$, $x_Q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ jelöléssel

1. $a < b$ esetén

$$a < x_H(a,b) < x_G(a,b) < x_A(a,b) < x_Q(a,b) < b\,, \tag{1.64a}$$

és ugyanez a sorrend több tag esetén is, ha van köztük legalább két különböző.

2. $a = b$ esetén

$$a = x_A = x_G = x_H = x_Q = b\,. \tag{1.64b}$$

1.3. Pénzügyi matematika

A pénzügyi matematika a számtani és mértani sorok, vagyis az (1.47a)–(1.47c) és (1.49a)–(1.49d) képletek alkalmazásain nyugszik, de ezek az alkalmazások a bankügyben olyan sokrétűek és speciálisak, hogy egy nagyszámú speciális fogalommal dolgozó külön diszciplína jött létre. Így a pénzügyi matematika nemcsak a tőkének kamatos kamat és járadékfizetés révén történő változását vizsgálja, hanem lényegében felöleli a kamatszámítás, törlesztésszámítás, részletfizetés- és járadékszámítás, leírások, árfolyam- és reálkamat-számítás, valamint a befektetéselemzés területét. A következőkben az alapvető kérdésfeltevéseket és megoldási képleteket ismertetjük. A pénzügyi matematika teljes spektrumát illetően be kell érnünk az irodalomra való hivatkozással (lásd [1.2], [1.11]).

A *biztosítási matematika* és a *kockázatelmélet*, amelyek a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika módszereire épülnek, önálló diszciplínákat képeznek, és itt nem kerülnek megtárgyalásra (lásd [1.3], [1.4]).

1.3.1. Százalékszámítás

1. Százalék A *K mennyiség p százaléka* kifejezés a $\dfrac{p}{100}K$ értéket jelenti, ahol a pénzügyi alkalmazások során K egy tőkeösszeg. A százalék jele %, vagyis fennáll

$$p\% = \frac{p}{100}, \qquad \text{ill.} \qquad 1\% = 0{,}01. \tag{1.65}$$

2. Felár Ha K-hoz $p\%$ felárat számítunk, a megnövelt érték

$$\tilde{K} = K\left(1+\frac{p}{100}\right). \tag{1.66}$$

Ha a $K\frac{p}{100}$ felárat az új $\tilde{K}$ értékhez viszonyítjuk, akkor a $K\frac{p}{100} : \tilde{K} = \tilde{p} : 100$ arányosság alapján a $\tilde{K}$-ban foglalt felár

$$\tilde{p} = \frac{p \cdot 100}{100+p} \tag{1.67}$$

százalék.

■ Ha egy áru értéke 200,– Ft és a felár 15%, akkor a végső ár 230,– Ft. Ez az ár a fogyasztó szempontjából $\tilde{p} = \frac{15 \cdot 100}{115} = 13{,}04$ százalék felárat tartalmaz.

3. Árengedmény Ha a K értékből $p\%$ *engedmény*t nyújtunk, a csökkentett érték

$$\tilde{K} = K\left(1-\frac{p}{100}\right). \tag{1.68}$$

Ha a $K\frac{p}{100}$ engedményt az új $\tilde{K}$ értékhez viszonyítjuk, akkor a nyújtott engedmény

$$\tilde{p} = \frac{p \cdot 100}{100-p} \tag{1.69}$$

százalék.

■ Legyen az áru értéke 300,– Ft. Ha az engedmény 10%, akkor a fizetendő összeg 270,– Ft. A vevő szempontjából ez az ár $\tilde{p} = \frac{10 \cdot 100}{90} = 11{,}11$ százalék engedményt tartalmaz.

1.3.2. Kamatoskamat-számítás

1. Kamat

A kamat egy hitelért (kölcsönért) fizetendő díj vagy egy követelés révén elért bevétel. Egy teljes *kamatperiódus*ra (általában 1 évre) befektetett K tőkére a kamatperiódus végén

$$K\frac{p}{100} \tag{1.70}$$

kamatot fizetnek. Itt p a *kamatperiódusra vonatkozó kamatláb*, és azt mondjuk, hogy a K tőkére $p\%$ kamatot fizetnek.

2. Kamatos kamat

Mivel a tőke minden kamatperiódus végén megnő a kamat összegével, a következő kamatperiódusban a befolyt kamat is kamatozik a tőkével együtt. Ezt az együttkamatozást *kamatos kamat*nak nevezzük. Ha a tőke kamatos kamattal változik, több esetet kell megkülönböztetni.

1. Egyszeri befizetés Éves tőkésítés esetén a K tőke n év után a K_n végértékre növekszik fel. Az n-edik év végén fennáll

$$K_n = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n. \tag{1.71}$$

Rövidség kedvéért bevezetjük az $1+\frac{p}{100} = q$ jelölést, és a q értéket *kamattényező*nek nevezzük.

*Évesnél gyakoribb tőkésítés*ről beszélünk, ha az év m darab egyenlő hosszúságú kamatperiódusra van felosztva, és a kamatot már minden ilyen kamatperiódus végén hozzáírják az aktuális, kezdetben K tőkéhez. Ekkor a kamatperiódusonkénti kamat $K_{\text{aktuális}}\frac{p}{100m}$, és n év után, amelyek mindegyike m

kamatperiódusból áll, a tőke a

$$K_{m\cdot n} = K\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{m\cdot n} \tag{1.72}$$

értékre növekszik fel.

■ 5000,– Ft tőke, amely évi 7,2%-kal kamatozik, 6 év alatt a) éves tőkésítés esetén $K_6 = 5000(1{+}0{,}072)^6 = 7588{,}20$-ra, b) havi tőkésítés esetén $K_{72} = 5000(1{+}0{,}072/12)^{72} = 7691{,}74$ Ft-ra növekszik fel.

2. Rendszeres befizetés és tőkésítés Egyenlő időközönként egyenlő E nagyságú befizetéseket kell teljesíteni. Az időközök meg kell hogy egyezzenek a kamatperiódussal. Ha a befizetés mindig a kamatperiódus elején, ill. végén történik, *előzetes* (praenumerando), ill. *utólagos* (postnumerando) befizetésről beszélünk. Az n-edik kamatperiódus végén a számla egyenlege K_n, mégpedig

a) előzetes befizetésnél:

$$K_n = Eq\frac{(q^n-1)}{q-1}, \tag{1.73a}$$

b) utólagos befizetésnél:

$$K_n = E\frac{q^n-1}{q-1}. \tag{1.73b}$$

3. Évesnél gyakoribb befizetés és évenkénti tőkésítés Az évet, ill. a kamatperiódust m darab egyenlő hosszúságú szakaszra bontjuk fel. Minden szakasz elején, ill. végén azonos E összeget fizetünk be, és az az év, ill. a kamatperiódus végéig időarányosan kamatozik. Ilyen módon egy év elteltével a K_1 egyenleget kapjuk, mégpedig

a) előzetes befizetésnél:

$$K_1 = E\left[m + \frac{(m+1)p}{200}\right], \tag{1.74a}$$

b) utólagos befizetésnél:

$$K_1 = E\left[m + \frac{(m-1)p}{200}\right]. \tag{1.74b}$$

A második évben K_1 teljes egészében kamatozik, ehhez jönnek még az első évihez hasonló befizetések és kamatok, úgyhogy n év után, évesnél gyakoribb befizetés és éves tőkésítés esetén, a K_n egyenleg

a) előzetes befizetésnél:

$$K_n = E\left[m + \frac{(m+1)p}{200}\right]\frac{q^n-1}{q-1}, \tag{1.75a}$$

b) utólagos befizetésnél:

$$K_n = E\left[m + \frac{(m-1)p}{200}\right]\frac{q^n-1}{q-1}. \tag{1.75b}$$

■ Egy betétes $p = 5{,}2$ éves kamatláb mellett havonként utólag 1000,– Ft-ot fizet be. Hány év alatt éri el az 500 000,–Ft-os egyenleget? Az (1.75b) képlet alapján $500\,000 = 1000\left[12 + \frac{11\cdot 5{,}2}{200}\right]\cdot\frac{1{,}052^n-1}{0{,}052}$, tehát $n = 22{,}42$ év.

1.3.3. Törlesztésszámítás

1.3.3.1. Törlesztés

Törlesztésen a hitel visszafizetését értjük. Ha nem írjuk elő másként, feltesszük a következőket:
1. Az S adósság megmaradó részéért az adóstól minden kamatperiódus végén p% kamatot követelnek.
2. Az adósság N kamatperiódusnyi futamidő alatt teljes egészében törlesztésre kerül.

Az adós kamatperiódusonkénti terhe tehát kamatokból és törlesztőrészletből tevődik össze. Ha a kamatperiódus 1 év, az adós adott évi pénzbeli ráfordítását *annuitás*nak nevezzük.

Adósságok törlesztésére különböző lehetőségek vannak. Pl. a visszafizetések történhetnek a tőkésítési időpontokban vagy azok között, a visszafizetett összegek lehetnek különbözők vagy az egész futamidő alatt állandóak.

1.3.3.2. Egyenlő törlesztőrészletek

A törlesztés évnél (kamatperiódusnál) rövidebb időközökben történik, de évközi tőkésítés és kamatos kamat a megállapodás szerint *nincs*. Legyen

- S az adósság, (kamatperiódusonként p% kamatot kell fizetni az egyes törlesztési időpontokban fennálló adósságok átlaga után),
- m a törlesztőrészletek száma kamatperiódusonként,

- N az évek (kamatperiódusok) száma az adósság végleges törlesztéséig.
- $T = \dfrac{S}{mN}$ a törlesztőrészlet (állandó),

Ezekkel a jelölésekkel az adósnak a törlesztőrészletek fizetésén kívül a következő kamatterhei vannak:

a) Z_n kamat az n-edik kamatperiódusra:

$$Z_n = \frac{pS}{100}\left[1 - \frac{1}{N}\left(n\,\frac{m+1}{2m}\right)\right], \quad (1.76\text{a})$$

b) Z összesített kamat az S adósság mN részletben, N kamatperiódus és p% kamatláb mellett történő utólagos törlesztésénél:

$$Z = \sum_{n=1}^{N} Z_n = \frac{pS}{100}\left[\frac{N-1}{2} + \frac{m+1}{2m}\right]. \quad (1.76\text{b})$$

■ Egy 60 000,– Ft-os adósság éves kamata 8%. Utólagos törlesztéssel 60 hónapon át mindig 1000,– Ft-ot törlesztünk. Mekkorák az egyes évek végén fellépő kamatok? Az egyes évekre eső kamatot az (1.76a) képletből számíthatjuk ki, ahol $S = 60\,000$, $p = 8$, $N = 5$ és $m = 12$. Ezek a mellékelt táblázatban vannak feltüntetve.
A teljes kamatot (1.76b) segítségével is kiszámíthattuk volna: $Z = \dfrac{8 \cdot 60\,000}{100}\left[\dfrac{5-1}{2} + \dfrac{13}{24}\right] = 12\,200$,– Ft.

1. év:	$Z_1 =$	4360,– Ft
2. év:	$Z_2 =$	3400,– Ft
3. év:	$Z_3 =$	2440,– Ft
4. év:	$Z_4 =$	1480,– Ft
5. év:	$Z_5 =$	520,– Ft
	$Z =$	12 200,– Ft

1.3.3.3. Egyenlő annuitások

Változatlanul maradó $T = \dfrac{S}{mN}$ törlesztőrészletek esetén a hozzájövő kamatok az idő múlásával csökkennek (lásd az előző példát). Ezzel szemben *annuitástörlesztés* esetén minden kamatfizetési határidőkor összesítve azonos A annuitást, vagyis azonos kamat + törlesztés összeget kell fizetni. Így az adós terhelése az egész törlesztési időszakban állandó.
Legyen

- S az adósság (kamatperiódusonként p% kamattal),
- A az annuitás egy kamatperiódusra (állandó),
- a a törlesztőrészlet, ha kamatperiódusonként m törlesztés történik (állandó),
- $q = 1 + \dfrac{p}{100}$ a kamattényező.

Ezekkel a jelölésekkel az S_n adósságmaradvány n kamatperiódus után

$$S_n = Sq^n - a\left[m + \frac{(m-1)p}{200}\right]\frac{q^n - 1}{q-1}. \quad (1.77)$$

Itt az Sq^n tag az S adósság értékét adja meg kamatos kamattal n kamatperiódus után (lásd (1.71)), a második tag (1.77)-ben pedig a perióduson belüli a törlesztőrészletek összesített értékét írja le azok kamatos kamatozása mellett (lásd az (1.75b) képletet az $E = a$ választással). Az annuitásra fennáll

$$A = a\left[m + \frac{(m-1)p}{200}\right]. \quad (1.78)$$

Itt A az m-szeri a (kamatozó) részletfizetés összértéke. (1.78) alapján $A \geq ma$. Mivel feltevés szerint N kamatperiódus után a törlesztés véget ér, az (1.77) képletet $S_N = 0$ mellett alkalmazva és felhasználva (1.78)-at kapjuk:

$$A = Sq^N \frac{q-1}{q^N - 1} = S\frac{q-1}{1-q^{-N}}. \quad (1.79)$$

Pénzügyi matematikai feladatok megoldása céljából (1.79)-et megoldhatjuk az A, S, q, N mennyiségek bármelyikére, ha a többiek értéke ismert.

■ **A:** Egy 60 000,– Ft-os törlesztéses adósság évi kamata 8%, és 5 év alatt kell törleszteni. Mekkora az éves A törlesztés és a havi a törlesztőrészlet? (1.79)-ből, ill. (1.78)-ból kapjuk: $A = 60\,000 \dfrac{0{,}08}{1 - \dfrac{1}{1{,}08^5}} =$

$15027{,}39$ Ft , $a = \dfrac{15027{,}39}{12 + \dfrac{11 \cdot 8}{200}} = 1207{,}99$ Ft.

■ **B:** Egy $S = 100\,000$,– Ft nagyságú hitelt rendszeres törlesztéssel 7,5% évi kamat mellett $N = 8$ év alatt kell visszafizetni. Minden év végén még 5000,– Ft-ot kell pótlólag törleszteni. Mennyi a havi törlesztőrészlet? Az éves A törlesztés (1.79) szerint $A = 100\,000 \dfrac{0{,}075}{1 - \dfrac{1}{1{,}075^8}} = 17072{,}70$ Ft. Mivel A évi 12 darab a nagyságú törlesztőrészletből és egy évvégi pótlólagos 5000,– Ft-os befizetésből tevődik össze, (1.78) segítségével adódik: $A = a\left[12 + \dfrac{11 \cdot 7{,}5}{200}\right] + 5000 = 17072{,}70$. Tehát a havi teher $a = 972{,}62$,– Ft.

1.3.4. Járadékszámítás

1.3.4.1. Járadék

*Járadék*nak nevezzük azokat a fizetéseket, amelyek szabályos időközökben esedékesek; ezek lehetnek azonos vagy eltérő nagyságúak, előzetesek vagy utólagosak. Két esetet különböztetünk meg:

a) Befizetések A járadékösszegeket folyószámlára fizetik be, és azok kamatosan kamatoznak. Az 1.3.2. pont kamatoskamat-számítási képletei alkalmazhatók.

b) Visszafizetések A járadékfizetés egy kamatosan kamatozó tőkéből történik. Az 1.3.3. pont törlesztésszámítási képletei alkalmazhatók, de törlesztés helyett járadékot értünk. Ha mindig legfeljebb a keletkező kamatot fizetik ki járadékként, *örökjáradék*ról beszélünk.

A járadékfizetés (be- vagy visszafizetés) történhet a kamatozási fordulónapokon, tehát kamatozási fordulónap = járadékfizetési fordulónap, vagy a kamatperióduson (éven) belül rövidebb időközökben.

1.3.4.2. Utólagos konstans járadék

Ebben az esetben a kamatszámítás és a járadékfizetés fordulónapja meg kell hogy egyezzen. Legyen a kamatozás p% kamatos kamatú és legyen a járadékösszeg mindig azonos R nagyságú. Ekkor az R_n *járadék-végösszeg* megadja, hogy n kamatperiódus alatt a rendszeres járadékkifizetések mekkora értékre növekedtek fel:

$$R_n = R\frac{q^n - 1}{q - 1}\,. \tag{1.80}$$

Az R_0 *járadék-indulóösszeg* az az érték, amelyet az első kamatperiódus kezdetekor (egyetlen alkalommal) be kell fizetni ahhoz, hogy n kamatperiódus után kamatos kamattal az R_n járadék-végösszeget kapjuk:

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n}, \qquad \text{ahol} \quad q = 1 + \frac{p}{100}\,. \tag{1.81}$$

■ Egy cégtől valakinek 10 éven át minden év végén 5000,– Ft-ot kell kapnia. Az első kifizetés előtt a társaság csődöt jelent. A csődgondnoknál követelésként csak az R_0 járadék-indulóösszeget lehet érvényesíteni. Évi 4% kamat esetén fennáll

$$R_0 = \frac{1}{q^n}R\frac{q^n - 1}{q - 1} = R\frac{1 - q^{-n}}{q - 1} = 5000\frac{1 - 1{,}04^{-10}}{0{,}04} = 40\,554{,}48 \;\text{ Ft}\;.$$

1.3.4.3. Számlaegyenleg n-szeri járadékfizetés után

Utólagos járadékfizetés céljából álljon rendelkezésünkre K összegű tőke, amely p%-kal kamatozik. Minden kamatozási fordulónapon r járadékösszeg kerüljön kifizetésre. A K_n számlaegyenleg n kamatperiódus, vagyis n járadékkifizetés után

$$K_n = Kq^n - R_n = Kq^n - r\frac{q^n-1}{q-1}, \quad \text{ahol} \quad q = 1 + \frac{p}{100}\,. \tag{1.82a}$$

Következmények:

$$r = K\frac{p}{100} \tag{1.82b}$$

Azt kapjuk, hogy $K_n = K$, vagyis a tőke nem változik. Ez az *örökjáradék* esete.

$$r > K\frac{p}{100} \tag{1.82c}$$

A tőke teljes egészében felhasználásra kerül, mégpedig N számú járadékfizetés után. (1.82a)-ból a $K_N = 0$ helyettesítéssel

$$K = \frac{1}{q^N}r\frac{q^N-1}{q-1}\,. \tag{1.82d}$$

Ha évközi (kamatperióduson belüli) tőkésítés és járadékfizetés történik, akkor az (1.80)–(1.82a) képletekben n helyébe mn, $q = 1 + \dfrac{p}{100}$ helyébe pedig $q = 1 + \dfrac{p}{100m}$ írandó, feltéve hogy az eredeti kamatperiódust m darab egyenlő hosszúságú új kamatperiódusra osztottuk.

■ Mekkora összeget kell 20 éven át havonként utólag befizetni, hogy az utána következő 20 évben havonként 2000,– Ft járadékot lehessen felvenni? Legyen a kamatozás havi 0,5%.
(1.82d)-ből $n = 20 \cdot 12 = 240$ esetén a közvetlenül csatlakozó járadékfizetési időszakhoz szükséges K összegre a következőt kapjuk: $K = \dfrac{2000}{1{,}005^{240}}\dfrac{1{,}005^{240}-1}{0{,}005} = 279\ 161{,}54$ Ft. Az ehhez megkívánt havonkénti R befizetés (1.80) szerint az $R_{240} = 279\ 161{,}54 = R\dfrac{1{,}005^{240}-1}{0{,}005}$ összefüggésből adódik, tehát $R = 604{,}19$ Ft.

1.3.5. Leírások

1. Leírásfajták

Azoknál a javaknál, amelyek értéke pl. kopás vagy avulás miatt csökken, évenkénti *leírás*t szokás alkalmazni. A leírás következtében a pénzügyi év folyamán az éveleji *indulóérték* az évvégi *maradványérték*re csökken. Jelölések:

- A a beszerzési érték,
- N a használat időtartama (években),
- R_n a maradványérték n év után ($n \le N$),
- a_n $\quad (n = 1, 2, \ldots, N)$ az n-edik évben leírt összeg.

A leírásfajták elsősorban a *leírt összeg meghatározásá*ban térnek el egymástól:

- *Lineáris leírás*nál az évenként leírt összeg változatlan.
- *Degresszív leírás*nál az évenként leírt összeg csökkenő.

2. Lineáris leírás

Az évi leírás konstans, vagyis az a_n leírt összegre és az R_n maradványértékre n év után fennáll

$$a_n = \frac{A - R_N}{N} = a\,, \tag{1.83}$$

$$R_n = A - n\frac{A - R_N}{N} \quad (n = 1, 2, \ldots, N)\,. \tag{1.84}$$

Ha $R_N = 0$, az azt jelenti, hogy N év elteltével az eredeti értéket teljesen leírjuk.

■ Legyen egy gép beszerzési ára $A = 50\ 000$,– Ft. A gépet 5 év alatt az $R_5 = 10\ 000$,– Ft maradványértékre kell leírni.

Év	Indulóérték	Leírás	Maradványérték	Leírás az indulóérték %-ában
1	50 000	8000	42 000	16,0
2	42 000	8000	34 000	19,0
3	34 000	8000	26 000	23,5
4	26 000	8000	18 000	30,8
5	18 000	8000	10 000	44,4

Lineáris leírásnál (1.83) és (1.84) alapján a bal oldali *leírási terv* adódik.
Látható, hogy a mindenkori indulóértékre vonatkoztatott százalékos leírás erősen emelkedik.

3. Számtani sorozat szerint csökkenő leírás

A leírás ebben az esetben nem konstans, hanem évenként azonos d összeggel, a *leírási meredekség*gel csökken. Az n-edik évben leírt összeg

$$a_n = a_1 - (n-1)d \quad (n = 2, 3, \ldots, N;\ a_1 \text{ és } d \text{ adott})\,. \tag{1.85}$$

Ebből az egyenletből az $A - R_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ összefüggés felhasználásával

$$d = \frac{2[Na_1 - (A - R_N)]}{N(N-1)}\,. \tag{1.86}$$

A $d = 0$ speciális esetben a lineáris leírást kapjuk. A $d > 0$ esetben (1.86) miatt

$$a_1 > \frac{A - R_N}{N} = a\,, \tag{1.87}$$

ahol a a lineáris leírás leírt összege. Végeredményben $a_N > 0$ miatt a számtani sorozat szerint csökkenő leírás a_1 első leírt összegének ki kell elégítenie a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{A - R_N}{N} < a_1 < 2\frac{A - R_N}{N}\,. \tag{1.88}$$

■ Egy 50 000,– Ft beszerzési értékű gépet 5 év alatt számtani sorozat szerint csökkenő módon 10 000,– Ft-ra kell leírni. Ennek során az első évben 15 000,– Ft-ot kell leírni.

Év	Indulóérték	Leírás	Maradványérték	Leírás az indulóérték %-ában
1	50 000	15 000	35 000	30,0
2	35 000	11 500	23 500	32,9
3	23 500	8 000	15 500	34,0
4	15 500	4 500	11 000	29,0
5	11 000	1 000	10 000	9,1

A bal oldali leírási terv, amelynek az adatait a megadott képletekkel számítottuk ki, azt mutatja, hogy a százalékos leírás az utolsó tétel kivételével kiegyenlítettnek tekinthető.

4. Digitális leírás

A *digitális* leírás a számtani sorozat szerint csökkenő leírásnak az a speciális esete, amelynél megköveteljük, hogy az a_N utolsó leírt összeg megegyezzen a d leírási meredekséggel. Az $a_N = d$ összefüggésből

$$d = \frac{2(A - R_N)}{N(N+1)}\,, \tag{1.89a}$$

$$a_1 = Nd\,,\ a_2 = (N-1)d\,,\ \ldots\,, a_N = d\,. \tag{1.89b}$$

■ Legyen egy gép beszerzési ára $A = 50\,000$,– Ft. Ezt a gépet 5 év alatt digitálisan az $R_5 = 10\,000$,– Ft maradványértékre kell leírni.

Év	Induló-érték	Leírás	Maradvány-érték	Leírás az indulóérték %-ában
1	50 000	$a_1 = 5d = 13\,335$	36 665	26,7
2	36 665	$a_2 = 4d = 10\,668$	25 997	29,1
3	25 997	$a_3 = 3d = 8\,001$	17 996	30,8
4	17 996	$a_4 = 2d = 5\,334$	12 662	29,6
5	12 662	$a_5 = d = 2\,667$	9 995	21,1

A bal oldali leírási terv, amelynek az adatait a megadott képletekkel számítottuk ki, azt mutatja, hogy a százalékos leírás lefutása kiegyenlített. (Az elméleti d értékhez legközelebbi egészre kerekített d-t tüntettük fel.)

5. Mértani sorozat szerint csökkenő leírás

A mértani sorozat szerint csökkenő leírásnál minden évben az előző évi maradványérték p%-át írják le. Az n év utáni R_n maradványértékre fennáll

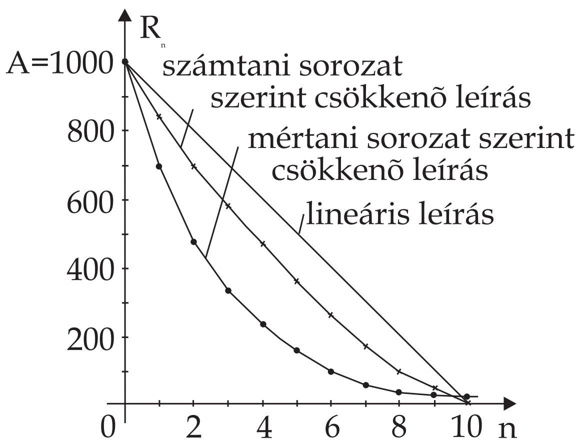
$$R_n = A\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{1.90}$$

Általában A adva van. Ha a futamidő N év, akkor (1.90) értelmében az R_N, p, N mennyiségek közül bármely kettő előírható, a harmadik pedig kiszámítható.

■ **A:** Egy 50 000,– Ft beszerzési értékű gépet évenként 10%-kal kell mértani sorozat szerint csökkenő módon leírni. Hány év után kerül a maradványérték 10 000,– Ft alá? (1.90) alapján

$$N = \frac{\ln(10000/50000)}{\ln(1 - 0{,}1)} = 15{,}27 \text{ év.}$$

■ **B:** Ábrázoljuk az R_n maradványértéket $A = 1000$,– Ft beszerzési érték esetén az $n = 1, 2, \ldots, 10$ évre a) lineáris, b) számtani sorozat szerint csökkenő, c) mértani sorozat szerint csökkenő leírás mellett. Az eredmény az **1.4. ábrán** látható.



1.4. ábra.

6. Leírás különböző leírásfajtákkal

Mivel a mértani sorozat szerint csökkenő leírásnál nulla maradványértéket véges n-re nem lehet elérni, egy meghatározott időponttól kezdve, például m év után, célszerű áttérni a mértani sorozat szerint csökkenő leírásról a lineáris leírásra. Az m értéket úgy választjuk meg, hogy ettől az időponttól kezdve a mértani sorozat szerint csökkenő leírás leírt összegei kisebbek legyenek, mint a lineáris leíráséi. Ezen követelmény értelmében

$$m > N - \frac{100}{p}\,. \tag{1.91}$$

Itt m a mértani sorozat szerint csökkenő leírás, N pedig a teljes leírás éveinek számát adja meg.

■ Egy 50 000,– Ft beszerzési értékű gépet 15 év alatt nullára kell leírni, mégpedig m éven át mértani sorozat szerint csökkenő leírással mindig a maradványérték 14%-ával, azután lineárisan. (1.91) értelmében $m > 15 - \dfrac{100}{14} = 7{,}76$, vagyis $m = 8$ év után célszerű a mértani sorozat szerint csökkenő leírásról a lineárisra áttérni.

1.4. Egyenlőtlenségek

1.4.1. Tiszta egyenlőtlenségek

1.4.1.1. Definíciók

1. Egyenlőtlenségek

Egyenlőtlenség jön létre, ha két algebrai kifejezést a következő jelek egyikével kapcsolunk egymáshoz:

I. típus	$>$	(„nagyobb”)	II. típus	$<$	(„kisebb”)
III. típus	$\neq$	(„különböző, nem egyenlő”)	IIIa. típus	$<>$	(„nagyobb vagy kisebb”)
IV. típus	$\geq$	(„nagyobb vagy egyenlő”)	IVa. típus	$\not<$	(„nem kisebb”)
V. típus	$\leq$	(„kisebb vagy egyenlő”)	Va. típus	$\not>$	(„nem nagyobb”).

A III. és IIIa., IV. és IVa., valamint V. és Va. jelpárok két tagja azonos jelentésű, tehát egymást kölcsönösen helyettesíthetik. A IIIa. jelet, ha olyan mennyiségekre vonatkozik, amelyekre a „nagyobb” és „kisebb” fogalma nincs értelmezve, pl. komplex számokra vagy vektorokra, a III. jellel helyettesíthetjük. Ha nem állítjuk kifejezetten az ellenkezőjét, a szereplő számok valósak.

2. Azonos, egyező irányú, ellentétes irányú és ekvivalens egyenlőtlenségek

1. Azonos egyenlőtlenségek azok, amelyek a bennük szereplő betűszimbólumok minden értékére teljesülnek.

2. Egyező irányú egyenlőtlenségekről beszélünk, ha két egyenlőtlenség mindegyike az I. típusba, vagy mindkettő a II. típusba tartozik.

3. Ellentétes irányú egyenlőtlenségekről beszélünk, ha az egyik egyenlőtlenség az I. típusba, a másik a II. típusba tartozik.

4. Ekvivalens egyenlőtlenségekkel van dolgunk, ha két, ugyanazon ismeretlenekre vonatkozó egyenlőtlenség az ismeretleneknek ugyanazokra az értékeire teljesül.

3. Egyenlőtlenségek megoldása

Az egyenlőtlenségekben, ugyanúgy mint az egyenletekben, ismeretlen mennyiségek is szerepelhetnek; ezeket rendszerint az ábécé utolsó betűivel jelöljük. Egy *egyenlőtlenség* vagy *egyenlőtlenségrendszer megoldása* azt jelenti, hogy meghatározzuk: milyen határok között mozoghatnak az ismeretlen mennyiségek ahhoz, hogy az egyenlőtlenség vagy a rendszer minden egyenlőtlensége érvényes maradjon. Mind az öt egyenlőtlenségtípus megoldására vannak heurisztikus módszerek; leggyakoribbak az I. és II. típusú, úgynevezett *tiszta egyenlőtlenségek*.

1.4.1.2. Az I. és II. típusú egyenlőtlenségek tulajdonságai

1. Az egyenlőtlenségjel irányának megváltozása

$$\text{Ha} \quad a > b\,, \quad \text{akkor} \quad b < a\,, \tag{1.92a}$$

$$\text{ha} \quad a < b\,, \quad \text{akkor} \quad b > a\,. \tag{1.92b}$$

2. Tranzitivitás

$$\text{Ha} \quad a > b \quad \text{és} \quad b > c\,, \quad \text{akkor} \quad a > c\,; \tag{1.93a}$$

$$\text{ha} \quad a < b \quad \text{és} \quad b < c\,, \quad \text{akkor} \quad a < c\,. \tag{1.93b}$$

3. Az egyenlőtlenség mindkét oldalának növelése/csökkentése ugyanazon értékkel

$$\text{Ha} \quad a > b\,, \quad \text{akkor} \quad a \pm c > b \pm c\,; \tag{1.94a}$$

$$\text{ha} \quad a < b\,, \quad \text{akkor} \quad a \pm c < b \pm c\,. \tag{1.94b}$$

Tehát mindkét oldalon ugyanazt a mennyiséget hozzáadva vagy kivonva az egyenlőtlenség továbbra is fennáll és iránya nem változik.

4. Egyenlőtlenségek összeadása

$$\text{Ha} \quad a > b \quad \text{és} \quad c > d\,, \quad \text{akkor} \quad a + c > b + d\,; \tag{1.95a}$$

$$\text{ha} \quad a < b \quad \text{és} \quad c < d\,, \quad \text{akkor} \quad a + c < b + d\,. \tag{1.95b}$$

Két azonos irányú egyenlőtlenség megfelelő oldalait össze lehet adni.

5. Egyenlőtlenségek kivonása

$$\text{Ha} \quad a > b \quad \text{és} \quad c < d\,, \quad \text{akkor} \quad a - c > b - d\,; \tag{1.96a}$$

$$\text{ha} \quad a < b \quad \text{és} \quad c > d\,, \quad \text{akkor} \quad a - c < b - d\,. \tag{1.96b}$$

Egy egyenlőtlenségből egy vele ellentétes irányú egyenlőtlenséget tagonként másszóval oldalanként ki lehet vonni, minek során az első egyenlőtlenség egyenlőtlenségjele marad érvényben. Azonos irányú egyenlőtlenségek viszont nem vonhatók ki egymásból tagonként.

6. Egyenlőtlenségnek számmal való szorzása és osztása

$$\text{Ha} \quad a > b \quad \text{és} \quad c > 0\,, \quad \text{akkor} \quad ac > bc \quad \text{és} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}\,, \tag{1.97a}$$

$$\text{ha} \quad a < b \quad \text{és} \quad c > 0, \quad \text{akkor} \quad ac < bc \quad \text{és} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}\,, \tag{1.97b}$$

$$\text{ha} \quad a > b \quad \text{és} \quad c < 0, \quad \text{akkor} \quad ac < bc \quad \text{és} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}\,, \tag{1.97c}$$

$$\text{ha} \quad a < b \quad \text{és} \quad c < 0, \quad \text{akkor} \quad ac > bc \quad \text{és} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}\,. \tag{1.97d}$$

Ha egy egyenlőtlenség mindkét oldalát egy pozitív számmal megszorozzuk vagy elosztjuk, akkor az egyenlőtlenség iránya megmarad; ha viszont a szám negatív, akkor az egyenlőtlenségjel irányát meg kell fordítani.

7. Reciprok értékekre vonatkozó egyenlőtlenség

$$\text{Ha} \quad 0 < a < b \quad \text{vagy} \quad a < b < 0\,, \quad \text{akkor} \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}\,. \tag{1.98}$$

Ha két szám a 0-tól ugyanabba az irányba esik, akkor reciprokaikra a köztük fennálló egyenlőtlenséggel ellentétes irányú egyenlőtlenség áll fenn.

1.4.2. Speciális egyenlőtlenségek

1.4.2.1. Háromszög-egyenlőtlenség

Bármely $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ valós számokra fennáll

$$|a + b| \le |a| + |b|\,, \qquad |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\,. \tag{1.99a}$$

Két vagy több valós szám összegének abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint az egyes összeadandók abszolút értékének összege. Az egyenlőségjel csak akkor érvényes, ha minden összeadandó azonos előjelű; itt a 0-t tekinthetjük negatív vagy pozitív előjelűnek is.

Hasonlóan, bármely $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ komplex számokra

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|\,, \tag{1.99b}$$

ami $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ miatt magában foglalja az előző egyenlőtlenséget is. Itt az egyenlőség csak akkor érvényes, ha közülük bármely kettőre teljesül, hogy egyik a másiknak nemnegatív valós számszorosa; ez pedig megában foglalja a valósz számokra vonatkozó hasonló feltételt. A korábban (1.1.3.1. alpont) bevezetett $\sum$ jellel $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

1.4.2.2. Egyenlőtlenségek két szám különbségének abszolút értékére

Két $a, b \in \mathbb{R}$ valós számra fennáll

$$|a| - |b| \le |a - b| \le |a| + |b|\,, \ \text{sőt} \ ||a| + |b|| \le |a - b| \le |a| + |b|\,. \tag{1.100a}$$

Két valós szám különbségének abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint e számok abszolút értékének összege, illetve nagyobb vagy egyenlő mint e számok abszolút értékének különbsége, sőt ennek abszolút értéke.

Hasonlóan és megint kiterjesztve két $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számra fennáll

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| . \tag{1.100b}$$

1.4.2.3. A számtani és a mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad \text{ha} \quad a_i \geq 0 . \tag{1.101}$$

n számú nemnegatív szám számtani közepe nagyobb vagy egyenlő mint e számok mértani közepe. Az egyenlőségjel csak akkor érvényes, ha mind az n darab szám egyenlő.

1.4.2.4. A számtani és a négyzetes középre vonatkozó egyenlőtlenség

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}{n}} . \tag{1.102}$$

Több szám számtani közepének abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint a négyzetes közép.

1.4.2.5. Valós számok különféle középértékeire vonatkozó egyenlőtlenségek

Két a és b pozitív valós szám, $a < b$, számtani, mértani, harmonikus és négyzetes közepét az alábbi egyenlőtlenségek kötik össze (lásd még 20. old.):

$$a < x_H(a,b) < x_G(a,b) < x_A(a,b) < x_Q(a,b) < b . \tag{1.103a}$$

Itt a következő jelöléseket használtuk:

$$x_A = \frac{a+b}{2} , \; x_G = \sqrt{ab} , \; x_H = \frac{2ab}{a+b} , \; x_Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} . \tag{1.103b}$$

1.4.2.6. Bernoulli-egyenlőtlenség

Bármely $a \geq -1$ valós számra és $n \geq 1$ egész számra

$$(1+a)^n \geq 1 + n\,a . \tag{1.104}$$

Az egyenlőségjel $n = 1$ vagy $a = 0$ esetén érvényes.

1.4.2.7. Binomiális egyenlőtlenség

Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ valós számra

$$|a\,b| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) . \tag{1.105}$$

1.4.2.8. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség

1. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség valós számokra Tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ valós számokra fennáll a CAUCHY–SCHWARZ-egyenlőtlenség:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}\;\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2} \tag{1.106a}$$

vagyis

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_n}^2) . \tag{1.106b}$$

Két véges számsorozatra, amelyeknek mindegyike n számból áll, a páronkénti szorzatok összegének abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint e számok négyzetösszegeiből vont két négyzetgyök szorzata. Az egyenlőségjel csak akkor érvényes, ha $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \cdots = a_n : b_n$. (Ha valamely i-re a_i (vagy b_i) $= 0$, akkor b_i (a_i) is 0.)

Ha $n = 3$, és az $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ számhármasokat vektorok Descartes-féle derékszögű koordinátáinak fogjuk fel, akkor a CAUCHY–SCHWARZ-egyenlőtlenség azt mondja, hogy két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint a vektorok abszolút értékének szorzata. Az $n > 3$ esetben ezt az állítást ki lehet terjeszteni az n-dimenziós euklideszi tér vektoraira; ez éppen (1.106a).

2. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség komplex számokra Tetszőleges $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ komplex számokra fennáll

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_n w_n| \leq \sqrt{\overline{z_1} z_1 + \overline{z_2} z_2 + \cdots + \overline{z_n} z_n}\,\sqrt{\overline{w_1} w_1 + \overline{w_2} w_2 + \cdots + \overline{w_n} w_n} = \\ = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}\sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2 + \cdots + |w_n|^2}\,, \quad (1.107)$$

amiből látszik, hogy ez is kiterjesztése a valós egyenlőtlenségnek. Itt $\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n}, \overline{w_1}, \overline{w_2}, \ldots, \overline{w_n}$ a $z_1, z_2, \ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_n$ számok komplex konjugáltjait jelölik (lásd 36. old.). Az egyenlőség feltétele: $z_1 : \overline{w_1} = z_2 : \overline{w_2} = \cdots = z_n : \overline{w_n}$. (Ha valamely i-re $z_i(w_i) = 0$, akkor $w_i(z_i)$ is 0.)

3. Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség konvergens végtelen sorokra és integrálokra Az alábbi, konvergens végtelen sorokra, ill. határozott integrálokra vonatkozó CAUCHY–SCHWARZ-egyenlőtlenség az (1.106b) képlet analogonja:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2\right), \quad (1.108)$$

$$\left[\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right]^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx\right). \quad (1.109)$$

1.4.2.9. Csebisev-egyenlőtlenség

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ nemnegatív valós számok, akkor

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \quad (1.110a)$$

$$\text{ahol} \quad a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \quad \text{és} \quad b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$$
$$\text{vagy} \quad a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \quad \text{és} \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$$

továbbá

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \quad (1.110b)$$

$$\text{ahol} \quad a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \quad \text{és} \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \quad \text{vagy fordítva}\,.$$

Két véges számsorozatra, amelyek n darab pozitív számból állnak, e sorozatok számtani közepeinek szorzata kisebb vagy egyenlő, ill. nagyobb vagy egyenlő, mint a páronkénti szorzatok számtani közepe, feltéve hogy egyszerre mindkét számsorozat csökkenő vagy növekedő, ill. az egyik sorozat növekedő és a másik csökkenő.

1.4.2.10. Általánosított Csebisev-egyenlőtlenség

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ nemnegatív valós számok, akkor

$$\sqrt[k]{\frac{{a_1}^k + {a_2}^k + \cdots + {a_n}^k}{n}}\,\sqrt[k]{\frac{{b_1}^k + {b_2}^k + \cdots + {b_n}^k}{n}} \leq \sqrt[k]{\frac{(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \cdots + (a_n b_n)^k}{n}} \quad (1.111a)$$

$$\text{ahol} \quad a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \quad \text{és} \quad b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$$
$$\text{vagy} \quad a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \quad \text{és} \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$$

továbbá

$$\sqrt[k]{\frac{{a_1}^k + {a_2}^k + \cdots + {a_n}^k}{n}}\,\sqrt[k]{\frac{{b_1}^k + {b_2}^k + \cdots + {b_n}^k}{n}} \geq \sqrt[k]{\frac{(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \cdots + (a_n b_n)^k}{n}} \quad (1.111b)$$

$$\text{ahol} \quad a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \quad \text{és} \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \quad \text{vagy fordítva}\,.$$

1.4.2.11. Hölder-egyenlőtlenség

1. Hölder-egyenlőtlenség sorokra Ha $p \geq 1$ és $q \geq 1$ két valós szám, amelyekre $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ és ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tetszőleges $2n$ komplex szám, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{1.112a}$$

Ez az egyenlőtlenség megszámlálhatóan végtelen sok számpárra is érvényes:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{1.112b}$$

ahol a jobb oldal értéke vagy végtelen (és akkor az állítás triviális), vagy ha véges, akkor a jobb oldalon álló két sor konvergenciájából következik a bal oldalon álló sor konvergenciája.

2. Hölder-egyenlőtlenség integrálokra Ha $f(x)$ és $g(x)$ két mérhető függvény az $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren (lásd 658. old.), akkor

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \left[\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_X |g(x)|^q \, d\mu\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{1.112c}$$

1.4.2.12. Minkowski-egyenlőtlenség

1. Minkowski-egyenlőtlenség sorokra Ha $p \geq 1$, továbbá $x_k, y_k \in \mathbb{C}$ két számsorozat, akkor

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{1.113a}$$

ahol az előző alpont első állításához hasonlóan ha a jobb oldali két összeadandó legalább egyike végtelen, akkor az állítás triviális vagy mindkettő véges és ebből következik a bal oldal végessége.

2. Minkowski-egyenlőtlenség integrálokra Ha $f(x)$ és $g(x)$ két mérhető függvény az $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren (lásd 658. old.), akkor

$$\left[\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_X |f(x)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_X |g(x)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.113b}$$

1.4.3. Első- és másodfokú egyenlőtlenségek megoldása

1.4.3.1. Általános rész

Egyenlőtlenséget úgy oldunk meg, hogy lépésről lépésre átalakítjuk ekvivalens egyenlőtlenségekké. Az egyenletek megoldásához hasonlóan összeadandókat vihetünk át egyik oldalról a másikra előjelük egyidejű megváltoztatásával. Továbbá az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozhatjuk vagy oszthatjuk ugyanazzal a nullától különböző számmal, miáltal az egyenlőtlenségjel iránya megmarad ha ez a szám pozitív, viszont megváltozik ha a szám negatív. Az elsőfokú egyenlőtlenségek ilyen módon mindig az

$$ax > b \tag{1.114}$$

alakra, a másodfokúak a legegyszerűbb esetben az

$$x^2 > m \quad (1.115a) \qquad \text{vagy} \qquad x^2 < m \quad (1.115b)$$

alakra, az általános esetben pedig az

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (1.116a) \qquad \text{vagy} \qquad ax^2 + bx + c < 0 \quad (1.116b)$$

alakra hozhatók.

1.4.3.2. Elsőfokú egyenlőtlenségek

Az elsőfokú egyenlőtlenségek megoldása

$$x > \frac{b}{a} \text{ ha } a > 0 \quad (1.117a) \qquad \text{és} \qquad x < \frac{b}{a} \text{ ha } a < 0. \quad (1.117b)$$

■ $5x + 3 < 8x + 1\,,\quad 5x - 8x < 1 - 3\,,\quad -3x < -2\,,\quad x > \frac{2}{3}$. (Lásd még a 18. fejezetet.)

1.4.3.3. Másodfokú egyenlőtlenségek

Az $\quad x^2 > m \quad (1.118a) \qquad$ és $\qquad x^2 < m \quad (1.118b)$

másodfokú egyenlőtlenségek megoldásai az alábbiak.

a) $x^2 > m$: Ha $m \geq 0$ a megoldás $x > \sqrt{m}$ és $x < -\sqrt{m}$ $\quad (|x| > \sqrt{m})\,,$ (1.119a)

ha $m < 0$ akkor az egyenlőtlenség azonosan teljesül. (1.119b)

b) $x^2 < m$: Ha $m > 0$ a megoldás $-\sqrt{m} < x < +\sqrt{m}$ $\quad (|x| < \sqrt{m})\,,$ (1.120a)

ha $m \leq 0$, akkor nincs megoldás. (1.120b)

1.4.3.4. A másodfokú egyenlőtlenség általános esete

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (1.121a) \qquad \text{vagy} \qquad ax^2 + bx + c < 0\,. \quad (1.121b)$$

Az egyenlőtlenséget elosztjuk a-val, miáltal az $a < 0$ esetben az előjel megváltozik, úgyhogy az

$$x^2 + px + q < 0 \quad (1.121c) \qquad \text{vagy} \qquad x^2 + px + q > 0 \quad (1.121d)$$

alakot kapjuk. Teljes négyzetté való kiegészítéssel adódik

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad (1.121e) \qquad \text{vagy} \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\,. \quad (1.121f)$$

$x + \frac{p}{2}$ helyett a z, $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ helyett az m jelölést bevezetve kapjuk a

$$z^2 < m \quad (1.122a) \qquad \text{vagy} \qquad z^2 > m\,. \quad (1.122b)$$

egyenlőtlenséget. Ha ezt megoldjuk, x meghatározható,

■ **A:** $-2x^2 + 14x - 20 > 0\,,\ x^2 - 7x + 10 < 0\,,\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}\,,\ -\frac{3}{2} < x - \frac{7}{2} < \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} < x < \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\,.$

A megoldás $2 < x < 5\,.$

■ **B:** $x^2 + 6x + 15 > 0\,,\ (x+3)^2 > -6\,.$ Az egyenlőtlenség azonosan teljesül.

■ **C:** $-2x^2 + 14x - 20 < 0\,,\ \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}\,,\ x - \frac{7}{2} > \frac{3}{2}$ és $x - \frac{7}{2} < -\frac{3}{2}\,.$

A megoldási tartományok $x > 5$ és $x < 2\,.$

Összefoglalva, a megfelelő másodfokú egyenlőség gyökei által méghatározott véges, nyílt intervallum vagy a két végtelen nyílt intervallum uniója a megoldás.

1.5. Komplex számok

1.5.1. Képzetes és komplex számok

1.5.1.1. Képzetes egység

Képzetes egységként bevezetésre kerül egy i szám, amelynek a négyzete „-1”. Az elektrotechnikában i helyett legtöbbször a j betűt használják, hogy ne lehessen az i áramerősséggel összetéveszteni. A *képzetes egység* bevezetése a *számfogalom általánosításá*ra vezet, a *komplex szám*okra, amelyek az algebrában és az analízisben nagy szerepet játszanak, és a geometriában meg a fizikában számos konkrét interpretációt, ill. új leírási lehetőséget eredményeztek.

1.5.1.2. Komplex számok

A *komplex számok algebrai alakja* a következő:

$$z = a + \mathrm{i}\, b\,. \tag{1.123a}$$

Ha a és b minden lehetséges valós értéken végigfut, akkor előáll minden lehetséges z komplex szám. Az a számot z *valós rész*ének, a b számot z *képzetes rész*ének nevezzük:

$$a = \mathrm{Re}(z)\,, \quad b = \mathrm{Im}(z)\,. \tag{1.123b}$$

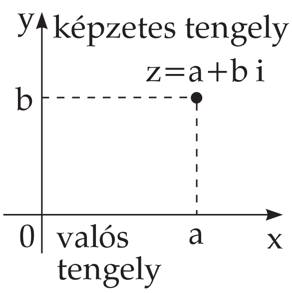
Ha $b = 0$, akkor $z = a$, úgyhogy a valós számok a komplex számok speciális esetei. Ha $a = 0$, akkor $z = \mathrm{i}\, b$ „tiszta képzetes szám”.
A komplex számokból épül fel a komplex számok halmaza, amelyet $\mathbb{C}$-vel jelölünk.

Megjegyzés: A $z = x + \mathrm{i}\, y$ komplex változó $w = f(z)$ függvényeit a komplex függvénytan (lásd a 694. és a rákövetkező oldalakat) tárgyalja.

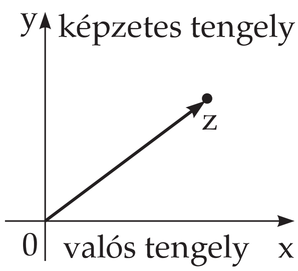
1.5.2. Geometriai szemléltetés

1.5.2.1. Előállítás vektoralakban

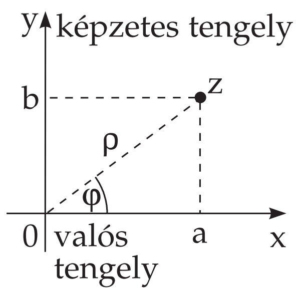
A valós számok számegyenesen való ábrázolásával analóg módon a komplex számokat egy sík, az úgynevezett GAUSS-*féle számsík* pontjaiként lehet ábrázolni. Ekkor a $z = a + \mathrm{i}\ b$ szám az a abszcisszájú és b ordinátájú pont **(1.5. ábra)**. A valós számok az abszcisszatengelyen helyezkednek el, amelyet valós tengelynek is hívnak, a képzetes számok pedig az ordinátatengelyen, más szóval a képzetes tengelyen. Az így megadott síkban minden pontot egyértelműen meghatároz egy *helyvektor* (lásd 181. old.), úgyhogy minden komplex számnak megfelel egy meghatározott vektor, amely ebben a síkban fekszik és a koordinátarendszer kezdőpontjából az illető pontba mutat **(1.6. ábra)**. A komplex számokat tehát pontokkal is, vektorokkal is ábrázolni lehet.



1.5. ábra.



1.6. ábra.



1.7. ábra.

1.5.2.2. Komplex számok egyenlősége

Definíció szerint két komplex szám egyenlő, ha *valós rész*eik is, *képzetes rész*eik is egyenlők. Geometriailag nézve két komplex szám akkor egyenlő, ha az őket ábrázoló vektorok egyenlők. Ellenkező esetben a komplex számok különbözők. A „nagyobb” és „kisebb” fogalma komplex számokra nem értelmezhető.

1.5.2.3. Komplex számok trigonometrikus alakja

A komplex számok

$$z = a + \mathrm{i}\, b \tag{1.124a}$$

előállítását algebrai alaknak nevezzük. Ha Descartes-koordináták helyett polárkoordinátákat használunk **(1.7. ábra)**, kapjuk a *komplex számok trigonometrikus alak*ban való előállítását:

$$z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)\,. \tag{1.124b}$$

A

$$|z| = \rho \quad (0 \le \rho < \infty) \tag{1.124c}$$

számot a z komplex szám *abszolút érték*ének vagy *modulus*ának, az

$$\arg z = \varphi + 2k\pi \quad (-\pi < \varphi \le +\pi\,;\;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.124d}$$

számok bármelyikét pedig z *argumentum*ának nevezzük. A φ szöget a z *komplex szám argumentuma főértéké*nek hívjuk (1.124b).

Egy pont ρ, φ és a, b értékei között ugyanaz a kapcsolat, mint e pont Descartes-féle és polárkoordinátái között (lásd 191. old.):

$$a = \rho\cos\varphi\,, \quad (1.125a) \qquad b = \rho\sin\varphi\,, \quad (1.125b) \qquad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad (1.125c)$$

ill.

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{a}{\rho} & \text{ha } b \ge 0,\ \rho > 0\,, \\ -\arccos\dfrac{a}{\rho} & \text{ha } b < 0,\ \rho > 0\,, \\ \text{határozatlan} & \text{ha } \rho = 0 \end{cases} \tag{1.125d}$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} & \text{ha } a > 0\,, \\ +\dfrac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0\,,\ b > 0\,, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0\,,\ b < 0\,, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi & \text{ha } a < 0\,,\ b \ge 0\,, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi & \text{ha } a < 0\,,\ b < 0\,. \end{cases} \tag{1.125e}$$

A $z = 0$ komplex szám abszolút értéke nulla, $\arg 0$ határozatlan.

1.5.2.4. Komplex szám exponenciális alakja

*Komplex szám exponenciális alakjá*nak nevezzük a

$$z = \rho e^{\mathrm{i}\,\varphi} \tag{1.126a}$$

előállítást, ahol ρ az abszolút érték és φ az argumentum. Fennáll az EULER-*féle összefüggés*:

$$e^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi\,. \tag{1.126b}$$

■ Egy komplex szám előállítása háromféle alakban:

a) $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ (algebrai alak), **b)** $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ (trigonometrikus alak),

c) $z = 2\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ (exponenciális alak), a főértékre szorítkozva.

Ha nem szorítkozunk a főértékre, a következő előállításokat kapjuk:

d) $z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\exp\left[\mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right] = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,.$

1.5.2.5. Konjugált komplex számok

A z és a $\overline{z}$ komplex számot *konjugált komplex szám*oknak nevezzük, ha valós részük egyenlő, képzetes részük viszont ellentétes előjelű:

$$\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)\,, \quad \mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)\,. \tag{1.127a}$$

Geometriailag kifejezve: a *konjugált komplex szám*oknak megfelelő pontok a valós tengelyre nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Konjugált komplex számok abszolút értékei egyenlők, argumentumaik pedig csak előjelben különböznek:

$$z = a + \mathrm{i}\,b = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi) = \rho e^{\mathrm{i}\,\varphi}\,, \tag{1.127b}$$

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}\,b = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin(-\varphi)) = \rho(\cos\varphi - \mathrm{i}\,\sin\varphi) = \rho e^{-\mathrm{i}\,\varphi}\,. \tag{1.127c}$$

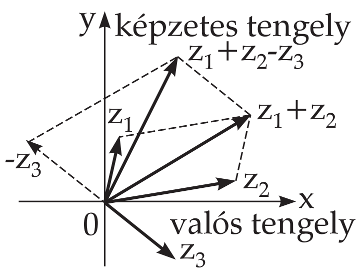
1.5.3. Számolás komplex számokkal

1.5.3.1. Összeadás és kivonás

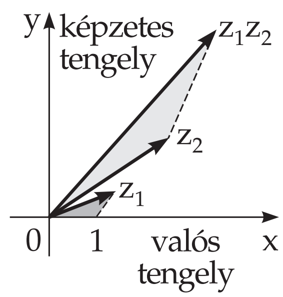
Két vagy több komplex szám összeadását és kivonását algebrai írásmódban a

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 - z_3 + \cdots &= (a_1 + \mathrm{i}\,b_1) + (a_2 + \mathrm{i}\,b_2) - (a_3 + \mathrm{i}\,b_3) + \cdots \\ &= (a_1 + a_2 - a_3 + \cdots) + \mathrm{i}\,(b_1 + b_2 - b_3 + \cdots) \end{aligned} \tag{1.128}$$

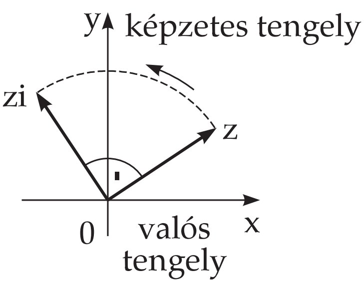
képlet értelmezi. A geometriai interpretációban az összeg-, ill. különbségképzéshez a szóbanforgó komplex számok vektorait kell összeadni, ill. kivonni **(1.8. ábra)**. Ennek során a vektorszámítás szokásos szabályai érvényesek (lásd 180. old.).



1.8. ábra.



1.9. ábra.



1.10. ábra.

1.5.3.2. Szorzás

Két komplex szám, z_1 és z_2 szorzását algebrai írásmódban a

$$z_1 z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\,b_1)(a_2 + \mathrm{i}\,b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}\,(a_1 b_2 + b_1 a_2)\,. \tag{1.129a}$$

képlet értelmezi. A trigonometrikus írásmódban fennáll

$$z_1 z_2 = [\rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)][\rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)] = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \tag{1.129b}$$

vagyis a szorzat abszolút értéke a tényezők abszolút értékeinek szorzatával, a szorzat argumentuma pedig a tényezők argumentumainak összegével egyenlő.
Exponenciális alakban:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}\,. \tag{1.129c}$$

A geometriai interpretációban a z_1 és z_2 szorzatát ábrázoló vektort úgy kapjuk meg, hogy z_1 vektorát az óramutató járásával ellentétesen a z_2 argumentumának megfelelő szöggel elforgatjuk, és a kapott vektort a $|z_2|$ számmal való szorzás révén megnyújtjuk. A $z_1 z_2$ szorzatot hasonló háromszög szerkesztésével is megkaphatjuk **(1.9. ábra)**. Itt figyelembe kell venni, hogy a z komplex szám i-vel való szorzása vektorának $\pi/2$ szöggel való elforgatását jelenti, miközben az abszolút érték változatlan marad **(1.10. ábra)**.

1.5.3.3. Osztás

Két komplex szám osztását a szorzás fordított műveleteként definiáljuk. Algebrai írásmódban a törtnek a nevező konjugáltjával való bővítése után a következőt kapjuk ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \mathrm{i}\, b_1}{a_2 + \mathrm{i}\, b_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2} + \mathrm{i}\, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2{}^2 + b_2{}^2}\,. \tag{1.130a}$$

A trigonometrikus írásmód szerint

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]\,, \tag{1.130b}$$

vagyis a hányados abszolút értéke az osztó és az osztandó abszolút értékeinek a hányadosával, a hányados argumentuma pedig a két argumentum különbségével egyenlő.
Exponenciális alakban:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}\,. \tag{1.130c}$$

A geometriai szemléltetésben a z_1/z_2 hányadost ábrázoló vektort úgy kapjuk, hogy a z_1 számnak megfelelő vektort az óramutató járásával megegyezően arg z_2 szöggel elforgatjuk, majd a $|z_2|$ értékkel való osztás útján zsugorítjuk.

Megjegyzés: A nullával való osztás nem $\mathbb{C}$-ben sem lehetséges.

1.5.3.4. A négy alapműveletre vonatkozó általános szabályok

Formális szempontból a $z = a + \mathrm{i}\, b$ komplex számokkal ugyanúgy lehet számolni, mint a közönséges kéttagú kifejezésekkel, csak azt kell figyelembe venni, hogy $\mathrm{i}^2 = -1$. Komplex számnak komplex számmal való osztásánál először ki kell küszöbölni a nevező képzetes részét úgy, hogy a számlálót és a nevezőt megszorozzuk a nevező komplex konjugáltjával. Ez lehetséges, mert az

$$(a + \mathrm{i}\, b)(a - \mathrm{i}\, b) = a^2 + b^2 \tag{1.131}$$

szám valós.

■ $\dfrac{(3-4\mathrm{i})(-1+5\mathrm{i})^2}{1+3\mathrm{i}} + \dfrac{10+7\mathrm{i}}{5\mathrm{i}} = \dfrac{(3-4\mathrm{i})(1-10\mathrm{i}-25)}{1+3\mathrm{i}} + \dfrac{(10+7\mathrm{i})\mathrm{i}}{5\mathrm{i}\,\mathrm{i}} = \dfrac{-2(3-4\mathrm{i})(12+5\mathrm{i})}{1+3\mathrm{i}} + \dfrac{7-10\mathrm{i}}{5} = \dfrac{-2(56-33\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})} + \dfrac{7-10\mathrm{i}}{5} = \dfrac{-2(-43-201\mathrm{i})}{10} + \dfrac{7-10\mathrm{i}}{5} = \dfrac{1}{5}(50+191\mathrm{i}) = 10+38{,}2\mathrm{i}\,.$

1.5.3.5. Komplex szám hatványozása

Komplex szám n-edik hatványra emelése a Moivre-*képlet* segítségével történik:

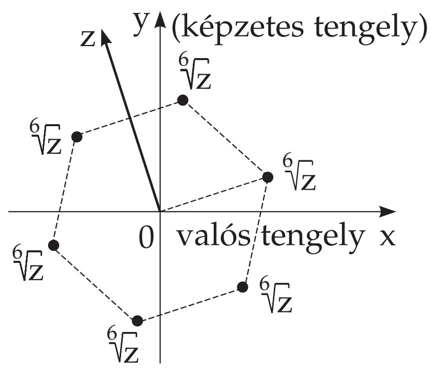
$$[\rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\,\sin n\varphi)\,, \tag{1.132a}$$

vagyis az abszolút értéket n-edik hatványra emeljük, az argumentumot pedig n-nel szorozzuk. Vegyük figyelembe, hogy

$$\mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}\,, \quad \mathrm{i}^4 = +1 \tag{1.132b}$$

és általában

$$\mathrm{i}^{4n+k} = \mathrm{i}^k\,. \tag{1.132c}$$



1.11. ábra.

1.5.3.6. Komplex szám n-edik gyökének meghatározása

Bármelyik n-edik gyök meghatározása a hatványozás egyik fordított művelete. Ha $z = \rho(\cos\varphi + {} + \mathrm{i}\sin\varphi)$, akkor a

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{z}, \quad \text{ahol} \quad n > 0, \ \text{egész}, \tag{1.133a}$$

írásmód az n darab

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.133b}$$

érték rövidített jelölése.
Míg az összeadás, kivonás, szorzás, osztás és egész kitevőjű hatványozás egyértelmű eredményre vezet, az n-edik gyök meghatározása mindig n különböző ω_k megoldást ad, kivéve a $z = 0$ esetet, amikor minden gyök $= 0$.
Geometriailag az ω_k pontok egy olyan szabályos n-szög csúcspontjai, amelynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja. Az **1.11. ábra** $\sqrt[6]{z}$ 6 értékét tünteti fel.

1.6. Algebrai és transzcendens egyenletek

1.6.1. Algebrai egyenletek normálalakra hozása

1.6.1.1. Definíció

Az

$$F(x) = f(x) \tag{1.134}$$

egyenletben szereplő x változót ismeretlennek nevezzük, a változónak azokat a speciális $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékeit pedig, amelyekre az egyenlet teljesül, az egyenlet *gyökei*nek vagy *megoldásai*nak mondjuk. Két egyenlet ekvivalens, ha pontosan ugyanazok a gyökeik.
*Algebrai egyenlet*ről akkor van szó, ha a benne fellépő $F(x)$ és $f(x)$ függvény algebrai, azaz racionális vagy irracionális; egyikük konstans is lehet. Minden algebrai egyenlet algebrai átalakításokkal a

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1.135}$$

*normálalak*ra hozható, amelynek ugyanazok a gyökei, mint az egyenlet eredeti alakjának; esetleg néhány további gyöke is van. Az a_n együttható értékét gyakran 1-re változtatjuk; egyébként az $a_n, \ldots, a_0$ együtthatókat itt és a továbbiakban is valósnak tételezzük fel, kivéve amikor külön felhívjuk a figyelmet ennek ellenkezőjére.
Az n kitevőt *az egyenlet foká*nak nevezzük.

■ Keressük az $\dfrac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 6}}{3(x-2)} = 1 + \dfrac{x-3}{x}$ egyenlet normálalakját. Többlépéses átalakítással: $x(x - 1 + \sqrt{x^2-6}) = 3x(x-2) + 3(x-2)(x-3)$, $\quad x^2 - x + x\sqrt{x^2-6} = 3x^2 - 6x + 3x^2 - 15x + 18$, $\quad x\sqrt{x^2-6} = 5x^2 - 20x + 18$, $\quad x^2(x^2-6) = 25x^4 - 200x^3 + 580x^2 - 720x + 324$, $\quad 24x^4 - 200x^3 + 586x^2 - 720x + 324 = 0$. Az eredmény egy normálalakú negyedfokú egyenlet.

1.6.1.2. n számú algebrai egyenletből álló rendszerek

Minden *algebrai egyenletrendszer* normálalakra, azaz polinomiális alakra hozható:

$$P_1(x, y, z, \ldots) = 0\,, \quad P_2(x, y, z, \ldots) = 0\,, \quad \ldots\,, \quad P_n(x, y, z, \ldots) = 0\,. \tag{1.136}$$

A P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvények az $x, y, z, \ldots$ változók polinomjai.

■ Keressük a következő egyenletekből álló rendszer normálalakját: 1. $\dfrac{x}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{z}$, 2. $\dfrac{x-1}{y-1} = \sqrt{z}$, 3. $xy = z$.

A normálalak: 1. $x^2z^2 - y = 0$, 2. $x^2 - 2x + 1 - y^2z + 2yz - z = 0$, 3. $xy - z = 0$.

1.6.1.3. Hamis gyökök

Algebrai egyenletnek az (1.135) normálalakra való átalakítása után előfordulhat, hogy a $P(x) = 0$ egyenletnek vannak olyan megoldásai, amelyek az (1.134) kiindulási egyenletnek nem megoldásai. Ezért próbára van szükség: $P(x) = 0$ gyökeit be kell helyettesíteni a kiindulási egyenletbe, és meg kell vizsgálni, hogy ezek (1.134)-nak is megoldásai-e vagy sem.

■ **A:** $\dfrac{x^3}{x-1} = \dfrac{1}{x-1}$. Ennek normálalakja $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$. A normálalaknak megoldása az $x = 1$ érték, de a kiindulási egyenletnek nem, mert utóbbi az $x = 1$ esetre nincs értelmezve.

■ **B:** $\sqrt{x+7} + 1 = 2x$ vagyis $\sqrt{x+7} = 2x - 1$. Négyzetre emeléssel kapjuk a $4x^2 - 5x - 6 = 0$ normálalakot, amelynek gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = -3/4$. Az $x_1 = 2$ gyök a kiindulási egyenletnek is megoldása, az x_2 gyök azonban nem.

1.6.2. 1.–4. fokú egyenletek

1.6.2.1. Elsőfokú (lineáris) egyenletek

1. Normálalak:

$$ax + b = 0\,. \tag{1.137}$$

2. A megoldások száma: Mindig egy valós

$$x_1 = -\frac{b}{a} \tag{1.138}$$

megoldás van.

1.6.2.2. Másodfokú (kvadratikus) egyenletek

1. Normálalak:

$$ax^2 + bx + c = 0\,. \tag{1.139a}$$

vagy a-val való osztás után:

$$x^2 + px + q = 0\,. \tag{1.139b}$$

2. A valós gyökök száma: A

$$D = 4ac - b^2 \quad \text{vagy} \quad D = q - \frac{p^2}{4} \tag{1.140}$$

diszkrimináns előjelétől függően kapjuk:

- $D < 0$ esetén 2 valós megoldás van (2 valós gyök),
- $D = 0$ esetén 1 valós megoldás van (2 egybeeső gyök),
- $D > 0$ esetén nincs valós megoldás (2 komplex gyök).

3. A másodfokú egyenlet gyökeinek tulajdonságai Ha x_1 és x_2 az (1.139a) vagy (1.139b) másodfokú egyenlet gyökei, akkor

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p\,, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q\,. \tag{1.141}$$

4. Másodfokú egyenletek megoldása:

1. módszer: Ha meg tudjuk határozni, az

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta) \quad (1.142\text{a}) \qquad \text{vagy} \quad x^2 + px + q = (x-\alpha)(x-\beta)\,, \quad (1.142\text{b})$$

szorzatfelbontás közvetlenül megadja az

$$x_1 = \alpha\,, \quad x_2 = \beta \tag{1.143}$$

gyököket.

■ $x^2 + x - 6 = 0$, $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

2. módszer: A megoldóképlet alkalmazása
a) az (1.139a) alak esetén az

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1.144a) \qquad \text{azaz} \qquad x_{1,2} = \frac{-\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}, \qquad (1.144b)$$

megoldásokra vezet, ahol a második képlet páros b mellett előnyös;
b) az (1.139b) alak esetén az

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad (1.145)$$

megoldásokat adja.

1.6.2.3. Harmadfokú egyenletek

1. Normálalak:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1.146a)$$

vagy a-val való osztás és az $y = x + \dfrac{b}{3a}$ helyettesítés után

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \qquad (1.146b)$$

ahol

$$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \quad \text{és} \quad 3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}\,. \qquad (1.146c)$$

2. A valós megoldások száma: A

$$D = q^2 + p^3 \qquad (1.147)$$

diszkrimináns előjelétől függően adódik
- $D > 0$ esetén esetén egy valós megoldás (egy valós és két komplex gyök),
- $D < 0$ esetén három valós megoldás (három különböző valós gyök),
- $D = 0$ esetén egy valós megoldás (egy háromszoros valós gyök) ha $p = q = 0$, vagy két valós megoldás (egy egyszeres valós gyök és egy kétszeres valós gyök) ha $p^3 = -q^2 \neq 0$.

3. A harmadfokú egyenlet gyökeinek tulajdonságai: Ha az (1.146a) harmadfokú egyenlet gyökei x_1, x_2 és x_3, akkor

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \qquad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}, \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}\,. \qquad (1.148)$$

4. A harmadfokú egyenletek megoldása:
1. módszer: Ha meg tudjuk határozni, az egyenlet bal oldalának

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \qquad (1.149a)$$

szorzatfelbontása közvetlenül megadja az egyenlet

$$x_1 = \alpha\,, \quad x_2 = \beta\,, \quad x_3 = \gamma \qquad (1.149b)$$

gyökeit.
■ $x^3 + x^2 - 6x = 0\,,\ x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2)\,; \quad x_1 = 0\,,\ x_2 = -3\,,\ x_3 = 2\,.$

2. módszer: CARDANO képletének alkalmazása. Az $y = u + v$ helyettesítéssel (1.146b) átmegy az

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + 3p) + 2q = 0 \qquad (1.150a)$$

egyenletbe. Ez biztosan teljesül akkor, ha fennáll

$$u^3 + v^3 = -2q \quad \text{és} \quad uv = -p\,. \qquad (1.150b)$$

Ha az (1.150b) összefüggéseket az

$$u^3 + v^3 = -2q\,, \qquad u^3v^3 = -p^3\,, \qquad (1.150c)$$

alakban írjuk, akkor a két ismeretlen u^3 és v^3 mennyiség összegét is, szorzatát is ismerjük, úgyhogy a VIETA-féle gyöktétel alapján (lásd 43. old.) felfoghatjuk őket a

$$w^2 - (u^3 + v^3)w + u^3v^3 = w^2 + 2qw - p^3 = 0 \tag{1.150d}$$

másodfokú egyenlet megoldásainak. Innen

$$w_1 = u^3 = -q + \sqrt{q^2 + p^3}\,, \qquad w_2 = v^3 = -q - \sqrt{q^2 + p^3}\,, \tag{1.150e}$$

úgyhogy az (1.146b) egyenlet y megoldásaira a

$$y = u + v = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \tag{1.150f}$$

CARDANO-*féle képlet*et kapjuk. Mivel minden köbgyöknek három értéke van (lásd (1.133b), 38. old.), kilenc esetet lehetne megkülönböztetni, ezek azonban az $uv = -p$ összefüggés miatt a következő három megoldásra redukálódnak:

$$y_1 = u_1 + v_1 \ (u_1 \text{ és } v_1 \text{ azok a valós köbgyökök (bármelyik ilyen pár), amelyekre } u_1v_1 = -p)\,, \tag{1.150g}$$

$$y_2 = u_1(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2})\sqrt{3} + v_1(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2})\sqrt{3}\,, \tag{1.150h}$$

$$y_3 = u_1(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2})\sqrt{3} + v_1(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2})\sqrt{3}\,. \tag{1.150i}$$

■ $y^3 + 6y + 2 = 0$. Itt $p = 2\,,\ q = 1\,,\ q^2 + p^3 = 9$ és $u = \sqrt[3]{-1+3} = \sqrt[3]{2} = 1{,}2599\,,$ $v = \sqrt[3]{-1-3} = \sqrt[3]{-4} = -1{,}5874\,.$ A valós gyök $y_1 = u + v = -0{,}3275$, a komplex gyökök $y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u+v) \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) = 0{,}1638 \pm \mathrm{i}\,2{,}4659$.

3. módszer: Az **1.2. táblázatban** feltüntetett *segédmennyiségek* alkalmazása. Bevezetjük az

$$r = \pm\sqrt{|p|} \tag{1.151}$$

jelölést, ahol p az (1.146b) egyenletből való, és r előjelét q előjelével egyezőnek választjuk. Ezután p és $D = q^2 + p^3$ előjelétől függően a táblázatból meghatározzuk a φ segédmennyiséget és ennek felhasználásával az y_1, y_2 és y_3 gyököt.

■ $y^3 - 9y + 4 = 0$. $p = -3\,,\ q = 2\,,\ q^2 + p^3 < 0\,, r = \sqrt{3}\,,\ \cos\varphi = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = 0{,}3849\,,\ \varphi = 67°22'\,.$ $y_1 = -2\sqrt{3}\cos 22°27' = -3{,}201\,,\ y_2 = 2\sqrt{3}\cos(60° - 22°27') = 2{,}747\,,\ y_3 = 2\sqrt{3}\cos(60° + 22°27') = 0{,}455\,.$ Próba: $y_1 + y_2 + y_3 = 0{,}001$, ami a kerekítési hibák miatt 0 helyett elfogadható.

4. módszer: Közelítő megoldás, lásd 910. old.

1.6.2.4. Negyedfokú egyenletek

1. Normálalak:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0\,. \tag{1.152}$$

Ha az egyenlet minden együtthatója valós, akkor vagy 0, vagy 2, vagy 4 valós megoldása van.

2. Speciális alakok: Ha $b = d = 0$, akkor az

$$ax^4 + cx^2 + e = 0 \tag{1.153a}$$

egyenlet gyökeit az

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{y}\,, \quad y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.153b}$$

képletekkel lehet kiszámítani. Ha $a = e$ és $b = d$, akkor az

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \tag{1.153c}$$

1.2. táblázat. Segédmennyiségek a harmadfokú egyenletek megoldásához

$p < 0$		$p > 0$
$q^2 + p^3 \leq 0$	$q^2 + p^3 > 0$	
$\cos\varphi = \dfrac{q}{r^3}$	$\operatorname{ch}\varphi = \dfrac{q}{r^3}$	$\operatorname{sh}\varphi = \dfrac{q}{r^3}$
$y_1 = -2r\cos\dfrac{\varphi}{3}$ $y_2 = +2r\cos\left(60^\circ - \dfrac{\varphi}{3}\right)$ $y_3 = +2r\cos\left(60^\circ + \dfrac{\varphi}{3}\right)$	$y_1 = -2r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}$ $y_2 = r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3} + \mathrm{i}\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}$ $y_3 = r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}\,r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}$	$y_1 = -2r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3}$ $y_2 = r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3} + \mathrm{i}\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}$ $y_3 = r\operatorname{sh}\dfrac{\varphi}{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}\,r\operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{3}$

egyenlet gyökeit a következő képletek segítségével nyerjük:

$$x_{1,2,3,4} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}\,, \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a}\,. \tag{1.153d}$$

3. Az általános negyedfokú egyenlet megoldása:

1. módszer: A bal oldal szorzatfelbontásával

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \tag{1.154a}$$

közvetlenül megadja az

$$x_1 = \alpha\,, \quad x_2 = \beta\,, \quad x_3 = \gamma\,, \quad x_4 = \delta \tag{1.154b}$$

gyököket.

■ $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0\,,\ x(x^2-1)(x-2) = x(x-1)(x+1)(x-2)\,;$
$x_1 = 0\,,\ x_2 = 1\,,\ x_3 = -1\,,\ x_4 = 2\,.$

2. módszer: Az (1.154a) egyenlet gyökei $a = 1$ esetén megegyeznek az

$$x^2 + (b+A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by - d}{A}\right) = 0 \tag{1.155a}$$

egyenlet gyökeivel, ahol $A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$ és y a következő harmadfokú egyenletnek egy valós gyöke:

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0\,. \tag{1.155b}$$

3. módszer: Közelítő megoldás, lásd 910. old.

1.6.2.5. Ötöd- és magasabbfokú egyenletek

általában nem oldhatók meg gyökvonásokkal és a többi algebrai művelettel.

1.6.3. n-edfokú egyenletek

1.6.3.1. Algebrai egyenletek általános tulajdonságai

1. Gyökök Az

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{1.156a}$$

egyenlet bal oldalát n-edfokú $P_n(x)$ polinomnak, (1.156a) megoldásait a $P_n(x)$ polinom gyökeinek nevezzük. Ha α a polinom egy gyöke, akkor $P_n(x)$ osztható az $(x - \alpha)$ kifejezéssel. Az általános esetben fennáll

$$P_n(x) = (x - \alpha)P_{n-1}(x) + P_n(\alpha)\,. \tag{1.156b}$$

Itt $P_{n-1}(x)$ egy $n-1$-edfokú polinom. Ha $P_n(x)$ osztható az $(x-\alpha)^k$, de nem osztható az $(x-\alpha)^{k+1}$ kifejezéssel, akkor azt mondjuk, hogy α a $P_n(x)=0$ egyenletnek *k-szoros gyöke*. Ebben az esetben α a $P_n(x)$ polinomnak és legfeljebb $(k-1)$-edrendű deriváltjainak közös gyöke.

2. Az algebra alaptétele Minden n–edfokú egyenletnek, amelynek az együtthatói valós vagy komplex számok, n darab valós vagy komplex gyöke van, ha a k-szoros gyököket k-szor számoljuk. Ha $P(x)$ gyökei $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ és ezeknek a multiplicitása (sokszorossága) rendre $k, l, m, \ldots$, akkor érvényes a

$$P(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l(x-\gamma)^m \ldots . \tag{1.157a}$$

szorzatelőállítás. A $P(x)=0$ egyenlet megoldását mindig meg lehet könnyíteni egy olyan egyenletre való visszavezetéssel, amelynek a gyökei ugyanazok, mint a kiindulási egyenletéi, de most már csak 1 multiplicitással. Ehhez a polinomot két tényezőre bontjuk a

$$P(x)=Q(x)T(x)\,, \tag{1.157b}$$

$$T(x)=(x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots, \quad Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\ldots \tag{1.157c}$$

képleteknek megfelelően. $T(x)$-et a $P(x)$ polinom és deriváltja, $P'(x)$ legnagyobb közös osztójaként (lásd 14. old.) lehet meghatározni, mert $P(x)$ többszörös gyökei $P'(x)$-nek is gyökei. Ezután a $Q(x)$ polinomot úgy kapjuk meg, hogy $P(x)$-et elosztjuk a $T(x)$ polinommal; $Q(x)$ zérushelyei ugyanazok, mint $P(x)$-éi, de multiplicitásuk 1.

3. A Vieta-féle gyöktétel (gyökök és együtthatók közötti összefüggések) Az (1.156a) egyenlet n darab $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gyöke és az együtthatók között fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+\ldots+x_n &= \sum_{i=1}^{n} x_i = -a_{n-1}\,,\\
x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n &= \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} x_ix_j = a_{n-2}\,,\\
x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n &= \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} x_ix_jx_k = -a_{n-3}\,,\\
&\ldots\\
x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n a_0.
\end{aligned} \tag{1.158}$$

1.6.3.2. Valós együtthatójú egyenletek

1. Komplex gyökök felléphetnek valós együtthatójú polinomegyenletek megoldásaiként is, de csak konjugált komplex párokban, vagyis ha $\alpha=a+\mathrm{i}\,b$ egy gyök, akkor $\beta=a-\mathrm{i}\,b$ is az, méghozzá ugyanazzal a multiplicitással. Másodfokú esetben a $p=-(\alpha+\beta)=-2a$ és $q=\alpha\beta=a^2+b^2$ jelöléssel fennáll $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$ és

$$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+px+q\,. \tag{1.159}$$

Ha az (1.157a) összefüggésben minden ilyen tényezőpár szorzatát (1.159) szerinti kifejezésével helyettesítjük, akkor a valós együtthatójú polinomnak egy *valós tényező*kre való felbontását kapjuk:

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots\\
&\quad\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}\,.
\end{aligned} \tag{1.160}$$

Itt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ a $P(x)$ polinom l darab valós gyöke. $P(x)$-nek van továbbá r pár konjugált komplex gyöke, amelyeket az $x^2+p_ix+q_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$ másodfokú tényezők zérushelyeiként nyerünk. Az α_j $(j=1,2,\ldots,l)$, p_i és q_i $(i=1,2,\ldots,r)$ számok valósak, és fennáll $\left(\frac{p_i}{2}\right)^2-q_i<0$. A gyökök multiplicitásai rendre $k_1, k_2, \ldots, k_l$ és $m_1, m_2, \ldots, m_r$.

2. Valós együtthatójú egyenlet gyökeinek száma Az (1.159) összefüggéssel kapcsolatban elmondottakból következik, hogy minden páratlan fokú egyenletnek van legalább egy valós gyöke. Hogy az (1.156a) egyenletnek két tetszőleges a és b valós szám között, ahol $a < b$, hány valós gyöke van, azt a következőképpen lehet meghatározni:

a) A többszörös gyökök leválasztása: Először leválasztjuk a $P(x) = 0$ egyenlet többszörös gyökeit, miáltal olyan egyenletet kapunk, amelynek minden gyöke megvan, de már csak 1 multiplicitással. Ezt az algebra alaptételénél ismertetett módon lehet megtenni.

Célszerűbb azonban az euklideszi algoritmushoz nagyon hasonló STURM-*módszer* szerint mindjárt a STURM-*féle lánc* (a STURM-*függvények*) meghatározásával kezdeni. Ha az utolsó, nullától különböző P_m maradék nem konstans, akkor $P(x)$-nek vannak többszörös gyökei, amelyeket le kell választani. Mindenesetre ezután az új $P(x) = 0$ egyenletnek nincsenek többszörös gyökei, de újra meg kell határozni a STURM-féle láncot.

b) A Sturm-függvények sorozatának képzése:

$$P(x), P'(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m = \text{const}\,. \tag{1.161}$$

Itt $P(x)$ az adott egyenlet bal oldala, $P'(x)$ a $P(x)$ első deriváltja, $P_1(x)$ a $P(x)$ polinomnak a $P'(x)$ polinommal való osztásánál keletkező maradék, de ellenkező előjellel véve, $P_2(x)$ a $P'(x)$ polinomnak a $P_1(x)$ polinommal való osztásánál fellépő, szintén ellenkező előjellel vett maradék stb.; $P_m =$ konstans $\neq 0$ az utolsó, de konstans maradék. A számolás egyszerűsítése céljából szabad a kapott maradékokat konstans pozitív szorzókkal megszorozni, ettől az eredmény nem változik meg.

c) Sturm tétele: Ha az (1.161) sorozatban a jelváltások, vagyis a „+”-ról „−”-ra, ill. fordítva történő átmenetek száma $x = a$ esetén A és $x = b$ esetén B és $P(a)$ és $P(b) \neq 0$, akkor az $A - B$ különbség egyenlő a $P(x) = 0$ egyenlet (a, b) intervallumban található valós gyökeinek a számával. Ha a számsorozatban egyes számok nullával egyenlők, akkor azokat a jelváltások megszámlálásánál ki kell hagyni.

■ Határozzuk meg az $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ egyenlet gyökeinek számát a $[0, 2]$ intervallumban. A STURM-*függvények* kiszámításával a következőt kapjuk: $P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$; $P'(x) = 4x^3 - 10x + 8$; $P_1(x) = 5x^2 - 12x + 16$; $P_2(x) = -3x + 284$; $P_3 = -1$. Az $x = 0$ helyettesítés a $-8, +8, +16, +284, -1$ sorozatot adja két jelváltással, az $x = 2$ helyettesítés pedig a $+4, +20, +12, +278, -1$ sorozatot egy jelváltással, úgyhogy $A - B = 2 - 1 = 1$, vagyis 0 és 2 között egy gyök található.

d) Descartes-féle előjelszabály: A $P(x) = 0$ egyenlet pozitív gyökeinek száma (most multiplicitással számolva) nem nagyobb, mint a $P(x)$ polinom együttható-sorozatában a jelváltások száma, és utóbbitól csak páros számmal különbözhet (megint elhagyjuk a 0-kat az együtthatók sorozatából).

■ Mit lehet mondani az $x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 1 = 0$ egyenlet gyökeiről? Az egyenlet együtthatóinak előjele rendre $+, +, -, +, -$, vagyis három jelváltás van. Az egyenletnek a DESCARTES-féle jelszabály szerint vagy egy, vagy három pozitív gyöke van. Mivel x helyébe $-x$ értéket írva az egyenlet gyökeinek előjele megváltozik, továbbá x helyébe az $x + h$ értéket írva a gyökök h-val csökkennek, a Descartes-féle jelszabály segítségével a negatív gyökök számát, valamint a h-nál nagyobb gyökök számát is becsülni lehet. A jelen példában x helyébe a $-x$ értéket írva az $x^4 - 2x^3 - x^2 - 5x - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, tehát az egyenletnek egy negatív gyöke van. Ha x helyébe az $x + 1$ értéket írjuk, akkor $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 13x + 6 = 0$ adódik — aminek nyilvánvalóan nincs pozitív gyöke —, tehát az egyenlet minden pozitív gyöke (egy vagy három darab) 1-nél kisebb.

3. *n*-edfokú egyenletek megoldása $n > 4$ esetén az egyenletek általában csak közelítőleg oldhatók meg. A gyakorlatban azonban már a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldására is közelítő módszereket alkalmaznak. n-edfokú algebrai egyenlet összes gyökei, köztük a komplexek, közelítő meghatározására szolgál a BRODETSKY–SMEAL-féle módszer (lásd [1.9], [19.38]). Algebrai egyenletek egyes valós gyökeinek kiszámítása a nemlineáris egyenletek megoldására szolgáló általános közelítő módszerekkel is lehetséges (lásd 907. old.). Algebrai egyenletek komplex zérushelyeinek meghatározására a BAIRSTOW-féle eljárás használható (lásd [19.22]).

1.6.4. Transzcendens egyenletek visszavezetése algebrai egyenletekre

1.6.4.1. Definíció

Az $F(x) = f(x)$ egyenlet transzcendens, ha az $F(x)$, $f(x)$ függvények közül legalább az egyik nem algebrai.

■ **A:** $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$, ■ **B:** $2\log_5(3x-1) - \log_5(12x+1) = 0$, ■ **C:** $3\,\mathrm{ch}\,x = \mathrm{sh}\,x + 9$,

■ **D:** $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$, ■ **E:** $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$, ■ **F:** $x\cos x = \sin x$.

Egyes esetekben a transzcendens egyenletek megoldását, pl. alkalmas helyettesítésekkel, algebrai egyenletek megoldására lehet visszavezetni. Általában azonban a transzcendens egyenleteket csak közelítőleg lehet megoldani. Alább néhány, algebrai egyenletre visszavezethető esetet tárgyalunk.

1.6.4.2. Exponenciális egyenletek

Exponenciális egyenletek, ha az x ismeretlen vagy egy $P(x)$ polinom csak egyes a, b, c, $\cdots$ mennyiségek kitevőjében szerepel, a következő két esetben vezethetők vissza algebrai egyenletre:

1. Ha az $a^{P_1(x)}$, $b^{P_2(x)}$, ... hatványokat nem kötik egymáshoz összeadások vagy kivonások, az egyenlet mindkét oldalának tetszőleges alapra vonatkozó logaritmusát vesszük.

■ $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$; $x\log 3 = (x-2)\log 4 + x\log 2$; $x = \dfrac{2\log 4}{\log 4 - \log 3 + \log 2}$.

2. Ha a, b, c, ... egyazon k szám egész vagy törtkitevőjű hatványai, vagyis $a = k^n$, $b = k^m$, $c = k^l$, ..., akkor bizonyos körülmények között az $y = k^x$ próbakifejezés segítségével y-ra algebrai egyenletet kapunk, amelynek megoldása után x-et az $x = \dfrac{\log y}{\log k}$ képlet révén számszerűen meg lehet határozni.

■ $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$; $\dfrac{2^x}{2} = \dfrac{2^{3x}}{64} - \dfrac{2^{2x}}{16}$. Az $y = 2^x$ helyettesítéssel $y^3 - 4y^2 - 32y = 0$ és $y_1 = 8$, $y_2 = -4$, $y_3 = 0$; $2^{x_1} = 8$, $2^{x_2} = -4$, $2^{x_3} = 0$, úgyhogy $x_1 = 3$. Több valós gyök nincs.

1.6.4.3. Logaritmikus egyenletek

*Logaritmikus egyenletek*et, ha az x ismeretlen vagy egy $P(x)$ polinom csak a logaritmusjel alatt fordul elő, a következő két esetben lehet algebrai egyenletre visszavezetni:

a) Ha az egyenlet csak egy bizonyos kifejezés logaritmusát tartalmazza, akkor ezt a logaritmust új ismeretlenként lehet bevezetni és az egyenletet erre megoldani. Az eredeti ismeretlent a logaritmusból számítjuk ki.

■ $m[\log_a P(x)]^2 + n = a\sqrt{[\log_a P(x)]^2 + b}$. Az $y = \log_a P(x)$ helyettesítés az $my^2 + n = a\sqrt{y^2 + b}$ egyenletre vezet. Az y mennyiség meghatározása után x-re a $P(x) = a^y$ egyenletet kapjuk.

b) Ha az egyenlet mindkét oldala olyan kifejezések egyazon a alapra vonatkozó logaritmusainak m, n, ... egész együtthatókkal képzett lineáris kombinációja, amelyek x-nek polinomjai, pl. az egyenlet $m\log_a P_1(x) + n\log_a P_2(x) + \cdots = 0$ alakú, akkor az egyenlet bal oldalát is, jobb oldalát is egyetlen kifejezés logaritmusára lehet visszavezetni.

■ $2\log_5(3x-1) - \log_5(12x+1) = 0$, $\log_5 \dfrac{(3x-1)^2}{12x+1} = \log_5 1$, $\dfrac{(3x-1)^2}{12x+1} = 1$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Az $x_1 = 0$ esetben a kiindulási egyenletbe való behelyettesítésnél egy negatív szám logaritmusa, vagyis komplex mennyiség lép fel, úgyhogy $x_1 = 0$ nem megoldás.

1.6.4.4. Trigonometrikus egyenletek

*Trigonometrikus egyenletek*et algebrai egyenletre lehet visszavezetni, ha az x ismeretlen vagy az n egész együtthatójú $nx + a$ kifejezés csak a trigonometrikus függvények argumentumában fordul elő. A trigonometrikus képletek alkalmazásával az egyenletet át lehet alakítani úgy, hogy x-nek csak egyetlen függvényét tartalmazza, és ezt y-nal tesszük egyenlővé. Az így kapott egyenlet megoldása után meghatározzuk x-et. Ügyelni kell a megoldások többértelműségére.

■ $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$ vagyis $\sin x = 1 - \sin^2 x - \frac{1}{4}$. Az $y = \sin x$ helyettesítéssel $y^2 + y - \frac{3}{4} = 0$ és $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Az y_2 megoldás a kiindulási egyenletre $|\sin x| \leq 1$ miatt nem ad valós megoldást; az $y_1 = \frac{1}{2}$ megoldás az $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ és $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ gyökökre vezet, ahol $k = 1, 2, 3, \ldots$.

1.6.4.5. Egyenletek hiperbolikus függvényekkel

Hiperbolikus függvényeket tartalmazó egyenletek akkor vezethetők vissza algebrai egyenletre, ha az x ismeretlen csak a hiperbolikus függvények argumentumában fordul elő. Ehhez a hiperbolikus függvényeket exponenciális kifejezésekkel helyettesítjük, majd alkalmazzuk az $y = e^x$ és $\frac{1}{y} = e^{-x}$ helyettesítést, miáltal y-ra algebrai egyenletet kapunk. Ennek megoldása után már csak az $x = \ln y$ értéket kell kiszámítani.

■ $3 \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$; $\frac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 9$; $e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$; $y + \frac{2}{y} - 9 = 0$, $y^2 - 9y + 2 = 0$; $y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$; $x_1 = \ln \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \approx 2{,}1716$, $x_2 = \ln \frac{9 - \sqrt{73}}{2} \approx -1{,}4784$.

2. Függvények és előállításuk

2.1. A függvény fogalma

2.1.1. A függvény definíciója

2.1.1.1. Függvény

Ha x és y két változó mennyiség, és ha egy adott x értékhez pontosan egy y érték van hozzárendelve, akkor az y mennyiséget x függvényének nevezzük és az

$$y = f(x)\,. \tag{2.1}$$

jelölést használjuk. A változó x mennyiséget az y függvény *független változójá*nak vagy *argumentumá*nak nevezzük. Azok az x értékek, amelyekhez y érték van hozzárendelve, alkotják az $f(x)$ függvény D *értelmezési tartományát*. A változó y mennyiség neve *függő változó*; az összes y értékek alkotják az $f(x)$ függvény W *értékkészletét*.

2.1.1.2. Valós függvény

Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet csak valós számokat tartalmaz, azt mondjuk, hogy $y = f(x)$ *valós változójú valós függvény*.

■ **A:** $y = x^2$, ahol $D:\ -\infty < x < \infty,\ W:\ 0 \le y < \infty\,.$

■ **B:** $y = \sqrt{x}$, ahol $D:\ 0 \le x < \infty,\qquad W:\ 0 \le y < \infty\,.$

2.1.1.3. Többváltozós függvény

Ha az y változó egynél több $x_1, x_2, \ldots, x_n$ független változótól függ, akkor az

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.2}$$

jelölést használjuk és többváltozós függvényről beszélünk (lásd 121. old.).

2.1.1.4. Komplex függvény

Ha a független változó egy z *komplex szám*, akkor a $w = f(z)$ képlet *komplex változójú komplex függvény*t ír le, amelyet a komplex függvénytan (lásd 694. old.) tárgyal. A komplex függvények közé tartoznak azon függvények is, amelyek valós x argumentumokra vannak értelmezve, de komplex $f(x)$ függvényértékeket vesznek fel.

2.1.1.5. További függvények

Különböző alkalmazási területeken, pl. a vektoranalízisben olyan függvények kerülnek felhasználásra, amelyeknél az argumentum és a függvényértékek például a következőképpen vannak értelmezve:

a) Az argumentum valós – a függvény vektor értékű.

■ **A:** Vektorfüggvény (lásd 664. old.).

■ **B:** Síkbeli és térbeli görbék paraméteres előállítása (lásd 238. old.).

b) Az argumentum vektor értékű – a függvény valós.

■ Skalármező (lásd 665. old.).

c) Az argumentum vektor értékű – a függvény vektor értékű.

■ Vektormező (lásd 666. old.).

2.1.1.6. Funkcionálok

Ha egy meghatározott függvényosztály minden egyes $x = x(t)$ függvényéhez hozzá van rendelve egy valós szám, *funkcionál*ról beszélünk.

■ **A:** Ha $\varphi(t)$ adott, az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvény, akkor $f(x) = \int_a^b \varphi(t)x(t)\,dt$ lineáris funkcionál, amely az összes, az $[a, b]$ intervallumon folytonos $x = x(t)$ függvényekre értelmezett (lásd 637. old.).

■ **B:** A variációszámítási feladatok integrálkifejezései (lásd 561. old.).

2.1.1.7. Függvény és leképezés

Legyen adva két nem üres halmaz, X és Y. *Leképezés*en, amelyet az

$$f : X \to Y \tag{2.3}$$

módon jelölünk, olyan előírást értünk, amely X minden x eleméhez Y-nak egy egyértelműen meghatározott y elemét rendeli. Az y elemet az x elem *képének* nevezzük, és használjuk az $y = f(x)$ írásmódot is. Azt mondjuk, hogy az Y halmaz az f *képtartománya* vagy *értékkészlete*, az X halmaz pedig f *értelmezési tartománya*.

■ **A:** Ha az értelmezési tartomány és a képtartomány a valós számok halmazának egy-egy részhalmaza, vagyis $X = D \subset \mathbb{R}$ és $Y = W \subset \mathbb{R}$, akkor a (2.3) képlet az x valós változónak egy $y = f(x)$ valós függvényét írja le.

■ **B:** Ha f egy $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ mátrix, továbbá $X = \mathbb{R}^n$ és $Y = \mathbb{R}^m$, akkor a (2.3) képlet $\mathbb{R}^n$-nek egy $\mathbb{R}^m$-be való leképezését írja le. A (2.3) előírás ekkor a következő, m lineáris egyenletből álló rendszert jelenti:

$$\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}, \qquad \text{ill.} \qquad \begin{array}{rcl} y_1 &=& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &=& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_m &=& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{array}$$

vagyis $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}$ az $\mathbf{A}$ mátrix x vektorral való szorzata.

Megjegyzések:

1. A leképezés fogalma a függvényfogalom általánosítása. Ezért a leképezéseket függvényeknek is nevezik.

2. A leképezések főbb tulajdonságai a 293, 293. oldalakon találhatók.

3. Az olyan leképezést, amely egy X absztrakt tér minden eleméhez egyértelműen egy, esetleg másik, Y absztrakt tér valamelyik elemét rendeli, *operátor*nak nevezzük. Itt *absztrakt tér*en általában függvényteret értünk, mert az alkalmazások szempontjából fontos terek elemei legtöbbször függvények. Absztrakt terek például a lineáris terek (lásd Vektorterek, 321. old.), a metrikus terek (lásd 615 old.) és mindkettőjük közös részosztálya, a normált terek (lásd 626. old.).

2.1.2. Módszerek valós függvények értelmezésére

2.1.2.1. Függvény megadása

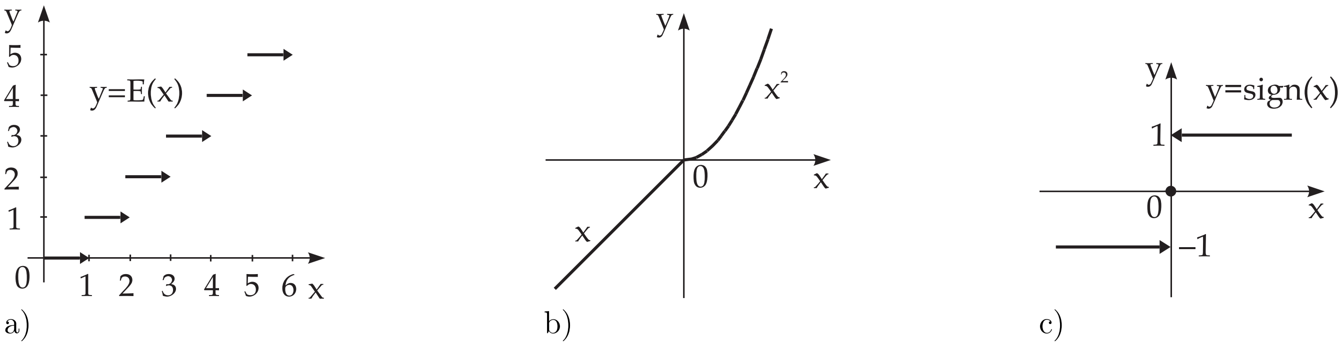
Függvényeket különbözőképpen lehet megadni vagy értelmezni, pl. értéktáblázattal, grafikus ábrázolással azaz görbével, egyetlen képlettel, amelyet *analitikus kifejezés*nek is neveznek, vagy (például szakaszonként) különböző képletekkel. Analitikus kifejezés *értelmezési tartományá*ban az argumentumnak csak olyan értékei szerepelhetnek, amelyekre a függvény értelmes, azaz egyértelműen meghatározott véges valós értéket vesz fel.

Példák szakaszonként eltérően megadott függvényekre:

■ **A:** $y = E(x) = [x] = n$, ha $n \le x < n + 1$, n egész.

■ **B:** $y = \begin{cases} x, & \text{ha } x \le 0, \\ x^2, & \text{ha } x \ge 0. \end{cases}$ ■ **C:** $y = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ +1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

Itt $\operatorname{sign}(x)$, ejtsd: „szignum x”, az *előjelfüggvény*t jelöli. Az $E(x)$, ill. $[x]$ függvény, ejtsd: „x egészrésze” azt a legnagyobb egész számot adja meg, amely kisebb vagy egyenlő mint x. A **2.1. ábrán** a megfelelő gráfok láthatók; a nyílhegyek arra utalnak, hogy végpontjuk nem tartozik a függvénygörbéhez.



2.1. ábra.

2.1.2.2. Valós függvény analitikus előállítása

Általában a következő három alakot használják:

1. Explicit előállítás: $y = f(x)\,.$ (2.4)

■ $y = \sqrt{1-x^2}\,, \quad -1 \le x \le 1\,, \quad 0 \le y \le 1\,.$ Itt a koordinátarendszer kezdőpontja köré rajzolt egységkör felső feléről van szó.

2. Implicit előállítás: $F(x,y) = 0\,,$ (2.5)
ha ez az egyenlet egyértelműen megoldható y-ra, azaz bármely x-hez legfeljebb egy y-ra teljesül.

■ $x^2+y^2-1=0\,, \quad -1 \le x \le +1\,, \quad 0 \le y \le 1\,.$ Itt is az egységkör felső feléről van szó. Megjegyezzük, hogy például az $x^2+y^2+1=0$ összefüggés nem értelmez valós függvényt.

3. Paraméteres előállítás: $x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,.$ (2.6)
x és y értékeit egy, *paraméter*nek nevezett, t segédváltozó függvényeként adjuk meg. A $\varphi(t)$, $\psi(t)$ függvények értelmezési tartománya azonos kell legyen.

■ $x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)$ ahol $\varphi(t) = \cos t$ és $\psi(t) = \sin t\,, \quad 0 \le t \le \pi\,.$ Itt ismét a koordinátarendszer kezdőpontja köré rajzolt egységkör felső felének előállításáról van szó.

Megjegyzés: Nem minden paraméteres előállítású függvénynek van paramétermentes explicit vagy implicit analitikus előállítása.

■ $x = t + 2\sin t = \varphi(t)\,,\ y = t - \cos t = \psi(t)\,.$

2.1.3. Néhány függvényfajta

2.1.3.1. Monoton függvények

Ha egy valós függvény az értelmezési tartományban bármely x_1 és x_2 argumentumra, ahol $x_2 > x_1$, teljesíti az

$$f(x_2) \ge f(x_1) \tag{2.7a}$$

feltételt, akkor *monoton növekedő függvény*nek nevezzük **(2.2.a ábra)**. Ha

$$f(x_2) \le f(x_1)\,, \tag{2.7b}$$

akkor *monoton csökkenő függvény*ről beszélünk **(2.2.b ábra)**. Ha a monotonitási feltétel nem teljesül

2.2. ábra.

az értelmezési tartományhoz tartozó minden x értékre, hanem csak a tartomány egy részében, pl. egy intervallumban vagy egy féltengelyen, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *ebben a résztartományban monoton.* Azokat a függvényeket, amelyekre az

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \text{vagy az} \quad f(x_2) < f(x_1) \tag{2.7c}$$

feltétel érvényes, vagyis a (2.7a), (2.7b) képletekben az egyenlőségjel nincs megengedve, *szigorúan monoton növekedő*nek, ill. *csökkenő*nek nevezzük. A **2.2.a ábrán** egy szigorúan monoton növekedő függvény van feltüntetve, a **2.2.b ábrán** pedig egy x_1 és x_2 között állandó, azon kívül szigorúan monoton csökkenő függvény.

■ $y = e^{-x}$ szigorúan monoton csökkenő $\mathbb{R}$-en, $y = \ln x$ pedig szigorúan monoton növekedő a pozitív féltengelyen.

2.1.3.2. Korlátos függvények

Egy valós értékű függvényt *felülről korlátos*nak nevezünk, ha értékei nem haladnak meg egy bizonyos számot (*felső korlát*), és *alulról korlátos*nak, ha értékei nem kisebbek egy meghatározott számnál (*alsó korlát*). A felülről is, alulról is korlátos függvényeket *korlátos*nak nevezzük.

■ **A:** $y = 1 - x^2$ felülről korlátos $(y \le 1)$. ■ **B:** $y = e^x$ alulról korlátos $(y > 0)$.

■ **C:** $y = \sin x$ korlátos $(-1 \le y \le +1)$. ■ **D:** $y = \dfrac{4}{1+x^2}$ korlátos $(0 < y \le 4)$.

2.1.3.3. Függvény szélsőértékei

A D értelmezési tartományú valós $f(x)$ függvénynek az a helyen *abszolút* vagy *globális maximuma* van, ha minden $x \in D$ értékre fennáll

$$f(a) \ge f(x)\,. \tag{2.8a}$$

Az $f(x)$ függvénynek az a helyen *relatív* vagy *lokális maximuma* van, ha a (2.8a) egyenlőtlenség csak a egy környezetében teljesül, vagyis azokra az x-ekre, amelyek kielégítik az $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon, \varepsilon > 0, x \in D$ feltételt.

Az *abszolút* vagy *globális minimum*, valamint a *relatív* vagy *lokális minimum* definíciója a fentiekkel analóg, csak a (2.8a) egyenlőtlenséget az

$$f(a) \le f(x)\,. \tag{2.8b}$$

egyenlőtlenséggel kell helyettesíteni.

Megjegyzések:

a) A maximum és minimum, közös néven *szélsőérték* fogalma nem kötődik a függvény differenciálhatóságához, tehát olyan függvényekre is vonatkozik, amelyek egyes helyeken nem, vagy éppen seholsem differenciálhatók. Tipikus példák erre bizonyos görbék csúcsai (lásd a **6.10.b, c ábrákat**, 396. old.).

b) Differenciálható függvények szélsőértékeinek meghatározására szolgáló módszerek a 6.1.5. fejezetben, a 395. oldaltól kezdődően találhatók.

2.1.3.4. Páros függvények

A *páros függvények* **(2.3.a ábra)** teljesítik az

$$f(-x) = f(x)\,. \tag{2.9a}$$

feltételt. Ha f értelmezési tartománya D, akkor teljesülnie kell, hogy

$$(x \in D) \Rightarrow (-x \in D)\,. \tag{2.9b}$$

■ **A:** $y = \cos x$, ■ **B:** $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

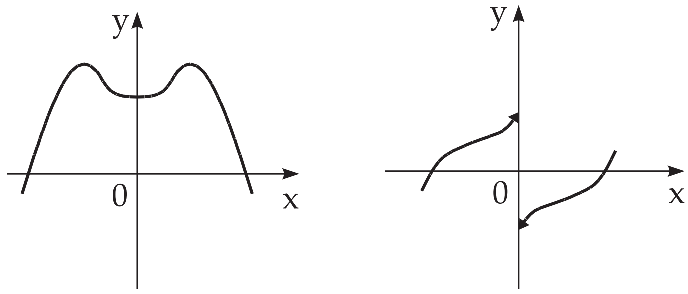
2.1.3.5. Páratlan függvények

A *páratlan függvények* **(2.3.b ábra)** teljesítik az

$$f(-x) = -f(x)\,. \tag{2.10a}$$

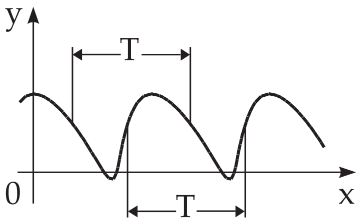
feltételt. Ha f értelmezési tartománya D, akkor megint

$$(x \in D) \Rightarrow (-x \in D)\,. \tag{2.10b}$$



a) b)

2.3. ábra.



2.4. ábra.

■ **A:** $y = \sin x$, ■ **B:** $y = x^3 - x$.

2.1.3.6. Előállítás páros és páratlan függvény segítségével

Ha az f függvény D értelmezési tartományára teljesül az előbbi „$x \in D$ esetén $-x \in D$” feltétel, akkor f előállítható egy g páros és egy u páratlan függvény összegeként:

$$f(x) = g(x) + u(x) \quad \text{ahol} \quad g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad u(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]. \tag{2.11}$$

■ $f(x) = e^x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ (l. 2.9.1.).

2.1.3.7. Periodikus függvények

A *periodikus függvények* valamely T-vel teljesítik az

$$f(x + T) = f(x), \quad T = \text{konstans}, \quad T \neq 0. \tag{2.12}$$

feltételt. A periódikus, folytonos, nemkonstans függvények esetén mindenképpen létező legkisebb pozitív T számot, amelyre ez a feltétel teljesül, *periódus*nak hívjuk **(2.4. ábra)**.

2.1.3.8. Inverz függvény

A D értelmezési tartományú és W értékkészletű $y = f(x)$ függvény minden $x \in D$ értékhez egy $y \in W$ értéket rendel. Ha megfordítva, minden $y \in W$ értékhez is egyértelműen hozzárendelhető egy $x \in D$ érték, amelyre $y = f(x)$, akkor f *inverz függvényét* kapjuk. Ezt a φ vagy az f^{-1} jellel jelöljük. Ebben az esetben az f^{-1} jel függvényszimbólum, nem hatványt fejez ki.

Az $y = f(x)$ függvényről úgy térünk át az inverz függvényre, hogy x-et és y-t felcseréljük és az $x = f(y)$ egyenletet megoldjuk y-ra, miáltal az $y = \varphi(x)$ eredményre jutunk. Az $y = f(x)$ és az $x = \varphi(y)$ előállítás egymással ekvivalens. Innen adódik a következő két fontos képlet:

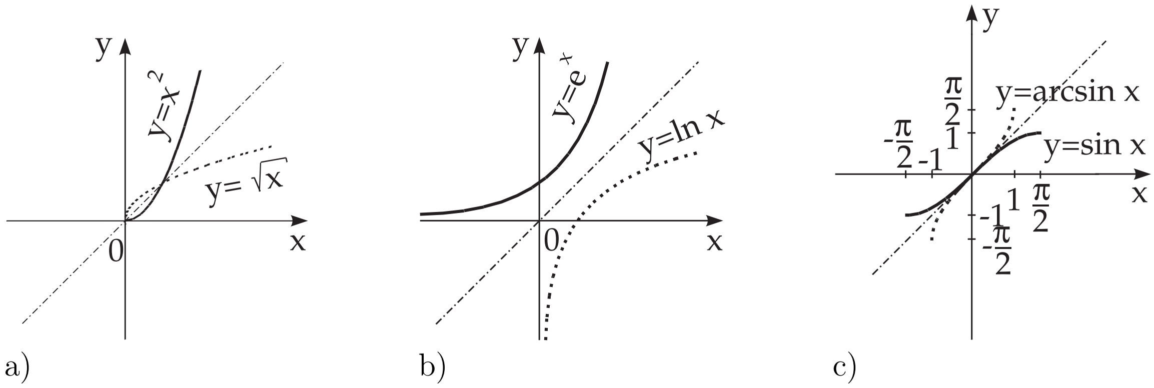
$$f(\varphi(y)) = y \quad \text{és} \quad \varphi(f(x)) = x. \tag{2.13}$$

■ Az $y = f(x) = e^x$ $(D: -\infty < x < \infty, W: y > 0)$ függvény ugyanazt a relációt fejezi ki, mint $x = \varphi(y) = \ln y$. Fennáll $e^{\ln y} = y, \ln e^x = x$.

Az $y = \varphi(x)$ inverz függvény görbéje $y = f(x)$ görbéjének az $y = x$ egyenesre való tükrözésével áll elő **(2.5. ábra)**.

Példák inverz függvényre:

■ **A:** $y = f(x) = x^2$,	ahol D: $x \geq 0$,	W: $y \geq 0$;
$y = \varphi(x) = \sqrt{x}$,	ahol D: $x \geq 0$,	W: $y \geq 0$.
■ **B:** $y = f(x) = e^x$,	ahol D: $-\infty < x < \infty$,	W: $y > 0$;
$y = \varphi(x) = \ln x$,	ahol D: $x > 0$,	W: $-\infty < y < \infty$.
■ **C:** $y = f(x) = \sin x$,	ahol D: $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$,	W: $-1 \leq y \leq 1$;
$y = \varphi(x) = \arcsin x$,	ahol D: $-1 \leq x \leq 1$,	W: $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.



2.5. ábra.

Megjegyzések:
1. Ha az f függvény az $I \subseteq D$ intervallumban szigorúan monoton, akkor erre az intervallumra megszorítva létezik az f^{-1} inverz függvény.
2. Emiatt, ha egy nem monoton függvény értelmezési tartománya felbontható olyan egymásba nem nyúló szakaszokra, amelyeken szigorúan monoton, akkor ezeken külön-külön létezik az inverz függvény.

2.1.4. Függvény határértéke

2.1.4.1. Függvény határértékének definíciója

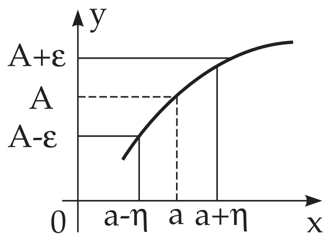
Legyen az $y = f(x)$ függvény értelmezve az a hely egy környezetében, magát az a helyet esetleg kivéve. A függvény *határértéke* vagy *limesze* az $x = a$ helyen A, jelben

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{vagy} \quad f(x) \to A \quad \text{ha} \quad x \to a\,, \tag{2.14}$$

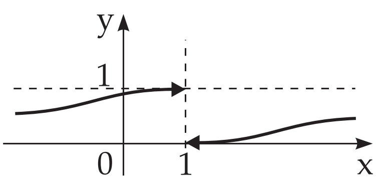
ha miközben x minden határon túl közeledik a-hoz, az $f(x)$ függvény minden határon túl közeledik A-hoz. Nem szükséges, hogy az $f(x)$ függvény az $x = a$ helyen az A értéket vegye fel, sőt, megismételjük, hogy még az sem, hogy e helyen értelmezve legyen.
Egzakt megfogalmazás: A (2.14) határérték akkor létezik, ha megadva egy tetszőlegesen kicsi pozitív ε számot, található egy másik pozitív η szám úgy, hogy

$$|x - a| < \eta \quad \text{esetén} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \tag{2.15}$$

kivéve esetleg az $x = a$ értéket (**2.6. ábra**).



2.6. ábra.



2.7. ábra.

Ha a egy szakasz határpontja, akkor az $|x - a| < \eta$ egyenlőtlenség az egyszerű $a - \eta < x$, ill. $x < a + \eta$ egyenlőtlenség közül az egyikre redukálódik.

2.1.4.2. Visszavezetés sorozat határértékére (lásd 410. old.)

Az $f(x)$ függvény határértéke az $x = a$ helyen A, ha az x értékek minden olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_n \neq a)$ sorozatára, amely az értelmezési tartományban fekszik és a-hoz konvergál, a megfelelő függvényértékek $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ sorozata A-hoz konvergál.

2.1.4.3. A Cauchy-féle konvergenciakritérium

Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen létezzen határértéke, szükséges és elégséges, hogy a független változó két tetszőleges, az értelmezési tartományhoz tartozó és a-hoz elég közel fekvő x_1, x_2 értékére a megfelelő $f(x_1)$, $f(x_2)$ függvényértékek egymástól tetszőlegesen kevéssé különbözzenek.
Egzakt megfogalmazás: Ahhoz, hogy az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen létezzen határértéke, szükséges és elégséges, hogy megadva egy tetszőlegesen kicsi pozitív ε számot, található legyen egy másik pozitív η szám úgy, hogy két tetszőleges, az értelmezési tartományhoz tartozó x_1, x_2 $(x_{1,2} \neq a)$ értékre, amelyekre teljesül az

$$|x_1 - a| < \eta \quad \text{és} \quad |x_2 - a| < \eta \tag{2.16a}$$

feltétel, fennálljon az

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \tag{2.16b}$$

egyenlőtlenség.

2.1.4.4. Végtelen mint függvény-határérték

A $$\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty \tag{2.17}$$

képlet azt fejezi ki, hogy amikor x az a helyhez közeledik, $f(x)$ abszolút értéke minden határon túl növekszik.
Egzakt megfogalmazás: A (2.17) összefüggés akkor érvényes, ha megadva egy tetszőlegesen nagy pozitív K számot, található egy pozitív η szám úgy, hogy az

$$a - \eta < x < a + \eta \tag{2.18a}$$

intervallumban fekvő tetszőleges $x \neq a$ értékekre $|f(x)|$ megfelelő értéke nagyobb mint K:

$$|f(x)| > K. \tag{2.18b}$$

Ha valamely η-val ilyenkor az

$$a - \eta < x < a + \eta \tag{2.18c}$$

intervallumban $f(x)$ minden értéke pozitív, akkor a

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\,, \tag{2.18d}$$

írásmódot, ha pedig negatív, a

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\,. \tag{2.18e}$$

írásmódot használjuk és azt mondjuk, hogy a függvény az adott helyen a $+\infty$-be, illetve a $-\infty$-be tart.

2.1.4.5. Függvény bal oldali és jobb oldali határértéke

Az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen a *bal oldali határértéke* A^-, ha az a számhoz minden határon túl alulról közeledő x értékek esetén a függvényérték minden határon túl közeledik az A^- értékhez:

$$A^- = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a - 0). \tag{2.19a}$$

Ehhez hasonlóan az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen a *jobb oldali határértéke* A^+, ha az a számhoz minden határon túl jobbról közeledő x értékek esetén a függvényérték minden határon túl közeledik az A^+ értékhez:

$$A^+ = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a + 0)\,. \tag{2.19b}$$

A $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ írásmód feltételezi, hogy a bal és a jobb oldali határérték létezik és megegyezik:

$$A^+ = A^- = A\,. \tag{2.19c}$$

■ Az $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ függvény $x \to 1$ esetén balról és jobbról két különböző határértékhez tart: $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$ **(2.7. ábra)**.

2.1.4.6. Függvény határértéke a végtelenben

Tegyük fel, hogy az $y = f(x)$ függvény D értelmezési tartománya felülről és/vagy alulról nem korlátos.

a eset) Azt mondjuk, hogy $x \to +\infty$ esetén az $f(x)$ függvény határértéke az

$$A = \lim_{x\to+\infty} f(x) \tag{2.20a}$$

szám, ha megadva egy tetszőlegesen kicsiny pozitív ε számot található olyan $N > 0$ szám, hogy tetszőleges $x > N$, $x \in D$ értékre a megfelelő $f(x)$ érték az $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ intervallumban helyezkedik el. Ehhez hasonlóan $x \to -\infty$ esetén az $f(x)$ függvény határértéke az

$$A = \lim_{x\to-\infty} f(x) \tag{2.20b}$$

szám, ha megadva egy tetszőlegesen kicsiny pozitív ε számot található olyan $-N < 0$ szám, hogy tetszőleges $x < -N$, $x \in D$ értékre a megfelelő $f(x)$ érték az $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ intervallumban helyezkedik el.

■ **A:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$, ■ **B:** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$, ■ **C:** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

b eset) Ha x korlátlan növekedése vagy korlátlan csökkenése esetén a függvény abszolút értéke minden határon túl növekszik, azt a következőképpen jelöljük:

$$\lim_{x\to-\infty} |f(x)| = \infty, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \infty\,; \tag{2.20c}$$

ha pedig valamely N-nel $x > N$ esetén $f(x) > 0$, illetve $f(x) < 0$, akkor $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, illetve $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ és hasonlóan $x < N$ esetén ∞ helyett $-\infty$-nel.

■ **A:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2} = +\infty\,,$ ■ **B:** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2} = -\infty\,,$

■ **C:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^3}{x^2} = -\infty\,,$ ■ **D:** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^3}{x^2} = +\infty\,.$

2.1.4.7. Függvények határértékeire vonatkozó tételek

1. Állandó függvény határértéke Állandó függvény határértéke egyenlő magával ezzel a mennyiséggel:

$$\lim_{x\to a} A = A\,. \tag{2.21}$$

2. Összeg vagy különbség határértéke Véges sok függvény bármilyen előjelekkel vett összegének határértéke egyenlő e függvények határértékeinek megfelelő előjelű összegével, feltéve hogy a határértékek külön-külön léteznek és végesek:

$$\lim_{x\to a} [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} \varphi(x) - \lim_{x\to a} \psi(x)\,. \tag{2.22}$$

3. Szorzat határértéke Véges sok függvény szorzatának határértéke egyenlő e függvények határértékeinek szorzatával, feltéve hogy a határértékek külön-külön léteznek és végesek:

$$\lim_{x\to a} [f(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \left[\lim_{x\to a} \varphi(x)\right] \left[\lim_{x\to a} \psi(x)\right]\,. \tag{2.23}$$

4. Hányados határértéke Két függvény hányadosának határértéke egyenlő e függvények határértékeinek hányadosával:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}\,, \tag{2.24}$$

feltéve hogy a határértékek külön-külön léteznek, végesek és $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$.

5. Közrefogás (rendőrelv) Ha az $f(x)$ függvény értékeit az a pont valamely környezetében két másik függvény, $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ értékei közrefogják, azaz minden ilyen x-re vagy $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$, vagy $\psi(x)\le f(x)\le\varphi(x)$, ha továbbá $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$ (itt A $\pm\infty$ is lehet), akkor

$$\lim_{x\to a} f(x)=A\,. \tag{2.25}$$

Megjegyzés: A fenti tételekben a $\pm\infty$ is lehet.

2.1.4.8. Határértékek kiszámítása

Határértékek kiszámítására a felsorolt öt tétel, valamint számos átalakítás (pl. gyöktelenítés) és módszer használatos:

1. Alkalmas átalakítás A függvényt a határérték kiszámítására alkalmas alakra hozzuk.

■ **A:** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3\,.$

■ **B:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}\,.$

■ **C:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\sin 2x)}{2x}=2\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=2\,.$

2. Bernoulli–l'Hospital-szabály Ha $\dfrac{0}{0}\,,\ \dfrac{\infty}{\infty}\,,\ 0\cdot\infty\,,\ \infty-\infty\,,\ 0^0\,,\ \infty^0\,,\ 1^\infty$ alakú határozatlan kifejezések lépnek fel, akkor a BERNOULLI–L'HOSPITAL-*szabályt* (röviden: L'HOSPITAL-szabályt) alkalmazzuk.

a eset) $\mathbf{\dfrac{0}{0}}$ vagy $\mathbf{\dfrac{\infty}{\infty}}$ alakú határozatlan kifejezések: Ha az $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ függvényre

1. $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$ ($\dfrac{0}{0}$ alakú határozatlan kifejezés), vagy
$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$ ($\dfrac{\infty}{\infty}$ alakú határozatlan kifejezés),

2. a $\varphi(x)$, $\psi(x)$ függvények egy, az a pontot tartalmazó intervallumban értelmezve vannak (magában az a pontban a függvények nem kell hogy értelmezve legyenek) és differenciálhatók, továbbá $\psi'(x)\neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\,, \tag{2.26}$$

feltéve hogy ez utóbbi határérték létezik (BERNOULLI–L'HOSPITAL-*szabály*). Ha a $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ képlet megint $\dfrac{0}{0}$ vagy $\dfrac{\infty}{\infty}$ alakú határozatlan kifejezést eredményez, az eljárást akárhányszor megismételhetjük.

■ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\dfrac{\cos x}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{\cos^2 x}}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}=1\,.$

b eset) $\mathbf{0\cdot\infty}$ alakú határozatlan kifejezések: Ha az **a)** esethez hasonló differenciálhatósági feltételek mellett fennáll $f(x)=\varphi(x)\,\psi(x)$, valamint $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$, akkor a $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ határértéket a $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}$ vagy $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$ alakra hozzuk, és ezzel a határérték kiszámítását visszavezetjük a $\dfrac{0}{0}$ vagy $\dfrac{\infty}{\infty}$ esetre.

■ $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)\operatorname{tg}x=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\pi-2x}{\operatorname{ctg}x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{-2}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=2\,.$

c eset) $\infty-\infty$ alakú határozatlan kifejezések: Ha az **a)** esethez hasonló feltételek mellett fennáll $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, valamint $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$, akkor a $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ határérték kiszámítására a különbséget a $\dfrac{0}{0}$ vagy reciprokra áttérve $\dfrac{\infty}{\infty}$ alakra hozzuk. Ez különféle módokon történhet, például $\dfrac{0}{0}$-t kapunk így: $\varphi-\psi=\left(\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\varphi}\right)\Big/\dfrac{1}{\varphi\psi}$.

■ $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x\ln x-x+1}{x\ln x-\ln x}\right)=„\dfrac{0}{0}”$. A L'HOSPITAL-szabály kétszeri alkalmazásával kapjuk: $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x\ln x-x+1}{x\ln x-\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=\dfrac{1}{2}\,.$

d eset) 0^0, ∞^0, 1^∞ alakú határozatlan kifejezések: Ha a egy környezetében $\varphi(x)>0$, $f(x)=\varphi(x)^{\psi(x)}$, valamint $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$, akkor először az $\ln f(x)=\psi(x)\ln\varphi(x)$ kifejezés A határértékét számítjuk ki, amely $0\cdot\infty$ alakú (**b) eset**), és ha ez létezik ($\pm\infty$ is lehet), akkor utána pedig végeredményként az e^A értéket. Ha $\varphi(x)\ge0$, de a bármilyen kis környezetében van x, hogy $\varphi(x)=0$, akkor ezen x-ekre $\psi(x)\ge0$ lehet csak, és ekkor a határérték csak $0^0=1$ vagy $0^{\psi(x)}=0$ lehet aszerint, hogy mindezen x-ekre $\psi(x)=0$, vagy pedig a-hoz elég közel már $\psi(x)>0$; mindkét esetben csak a többi x-ekre (ahol $\varphi(x)>0$) kell és lehet a fenti eljárással eldönteni, hogy ezekre is 1, illetve 0-e a határérték.

A ∞^0, 1^∞ esetekben analóg módon lehet eljárni, megint figyelembe véve hogy a ∞^0 esetben a kitevő $\psi(x)\ge0$ lehet csak.

■ $\lim\limits_{x\to0+0}x^x=X$, $\ln x^x=x\ln x$, $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln x=\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0+0}(-x)=0$, azaz $A=\ln X=0$, tehát $X=1$, és így $\lim\limits_{x\to0+0}x^x=1$, tehát a fentiek féloldali határértékre is érvényesek, amely aleset másrészt biztosítja is a megkívánt feltételeket.

3. Taylor-sorfejtés Határozatlan kifejezések határértékének kiszámítására a L'HOSPITAL-szabályon kívül a TAYLOR-sorba történő kifejtés is alkalmazható, ha a magasabb rendben kicsi mennyiségeket tudjuk együtt kezelni (lásd 395. old.).

■ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{x^2}{5!}+\cdots\right)=\dfrac{1}{6}\,.$

2.1.4.9. Függvények nagyságrendje és a Landau-féle szimbólumok

Két függvény összehasonlításánál gyakran fontos tudni, hogy milyen a függvények egymáshoz viszonyított viselkedése bizonyos $x=a$ helyek valamilyen típusú környezetében, ahol a $\pm\infty$ is lehet. Ezzel kapcsolatban a következő nagyságrendi összefüggések bevezetésére került sor.

1. Az $f(x)$ függvény magasabb rendben válik végtelen naggyá, mint a $g(x)$ függvény, ha az $x\to a$ határátmenet során e függvények abszolút értéke és az $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ hányados abszolút értéke minden határon túl növekszik.

2. Az $f(x)$ függvény magasabb rendben válik végtelen kicsinnyé, azaz magasabb rendben tűnik el, mint a $g(x)$ függvény, ha az $x \to a$ határátmenet során e függvények abszolút értéke és az $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ hányados nullához tart.

3. Két függvény, $f(x)$ és $g(x)$ azonos nagyságrendben tart nullához vagy végtelenhez, ha az $x \to a$ határátmenet során az $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ hányados abszolút értéke korlátos marad, pontosabban ha a-hoz elég közel fennáll $0 < m < \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < M < \infty$ (m és M konstans), tehát ez utóbbi az előző kettő antiszimmetrikussal ellentétetben szimmetrikus reláció, és így az alábbi jelöléssel $f(x) = O(g(x))$ és $g(x) = O(f(x))$.

4. A Landau-féle szimhólumok Két függvénynek egy tetszőleges $x = a$ helyre vonatkozó együttes viselkedését időnként a LANDAU-féle O („nagy ordó”), ill. o („kis ordó”) szimbólumokkal írjuk le a következőképpen: $x \to a$ és teljesen hasonlóan $x \to a - 0$ vagy $x \to a + 0$ esetén

$$f(x) = O(g(x)) \text{ jelentése : } \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ korlátos } a \text{ valamely tekintett típusú környezetében}\,, \tag{2.21a}$$

és

$$f(x) = o(g(x)) \text{ jelentése : } \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,, \tag{2.21b}$$

ahol megint $a = \pm\infty$ is meg van engedve és megint megköveteljük, hogy a ezen környezetében f és g értelmezve legyen és g ne tűnjön el.

■ **A:** $\sin x = O(x)$, ha $x \to 0$, mert az $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ szereposztással még a többet mondó $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ is fennáll, vagyis 0 környezetében $\sin x$ úgy viselkedik, mint x.

■ **B:** Ha $f(x) = 1 - \cos x$ és $g(x) = \sin x$, akkor $f(x)$ magasabb rendben tűnik el, mint $g(x)$: $\lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{1-\cos x}{\sin x}\right| = 0$, azaz $1 - \cos x = o(\sin x)$, ha $x \to 0$.

■ **C:** Ha $f(x) = 1 - \cos x$ és $g(x) = x^2$, akkor $f(x)$ és $g(x)$ azonos nagyságrendben tűnik el: $\lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right| = \dfrac{1}{2}$, azaz $1 - \cos x = O(x^2)$ és $x^2 = O(1 - \cos x)$, ha $x \to 0$.

Végül megjegyzendő, hogy mindezek a relációk teljesen hasonlóan definiálhatók sorozatokra, másképpen arra az esetre is, amikor a függvények csak egy sorozaton vannak definiálva.

5. Polinomok Racionális egész függvény nagyságrendjét a polinom fokával lehet kifejezni. Így az $f(x) = x$ függvény nagyságrendje 1, és egy $(n+1)$-edfokú polinom nagyságrendje 1-gyel nagyobb, mint egy n-edfokúé. Ez a besorolás azonban nem minden (akár elemi) függvényre végezhető el.

6. Exponenciális függvény Az exponenciális függvény a $+\infty$-ben gyorsabban tart végtelenhez, mint a bármilyen nagy kitevőjű x^n hatvány (n rögzített természetes szám):

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{e^x}{x^n}\right| = \infty\,. \tag{2.22a}$$

A L'HOSPITAL-szabály alapján ugyanis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty\,. \tag{2.22b}$$

7. Logaritmusfüggvény A logaritmusfüggvény a $+\infty$-ben lassabban tart végtelenhez, mint a bármilyen kicsiny pozitív kitevőjű x^c hatvány ($c > 0$):

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{\log x}{x^c}\right| = 0\,. \tag{2.23}$$

A bizonyítás ismét, ahogy a fentebbi példákban is, például a L'HOSPITAL-szabállyal történhet.

2.1.5. Függvény folytonossága

2.1.5.1. A folytonosság és a szakadási hely fogalma

Az alkalmazásokban legtöbbször szereplő függvények *folytonos függvények*, vagyis olyan $f(x)$ függvények, amelyeknél az x argumentum kicsiny megváltozásakor a függvény értéke is keveset változik. Az ilyen függvény grafikus ábrázolása összefüggő görbét eredményez. Ha ellenben a görbe egyes helyeken megszakad, akkor azt mondjuk, hogy a megfelelő függvény *nem folytonos*, és az argumentumnak azokat az értékeit, amelyekre a szakadás fellép, *szakadási helyek*nek nevezzük. A **2.8. ábrán** egy *szakaszonként folytonos* függvény görbéje van feltüntetve. A szakadási helyek az A, B, C, D, E, F, G pontok. A nyilak azt fejezik ki, hogy végpontjuk nem tartozik a görbéhez.

2.1.5.2. A folytonosság definíciója

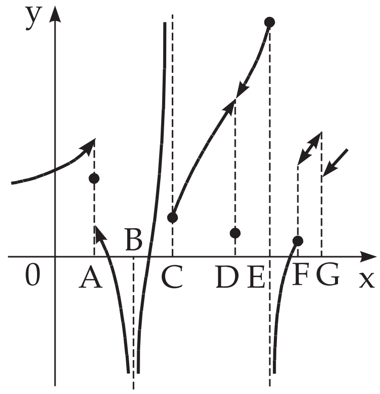
Azt mondjuk, hogy az $y = f(x)$ függvény az $x = a$ helyen *folytonos*, ha

1. $f(x)$ az a helyen értelmezve van és

2. a $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ határérték létezik és egyenlő $f(a)$-val. Ez pontosan akkor teljesül, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található egy $\delta(\varepsilon) > 0$ szám úgy, hogy

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ minden olyan } x\text{-re, amelyre } |x - a| < \delta. \quad (2.24)$$

Egyoldali (*bal-* vagy *jobboldali*) *folytonosság*ról beszélünk, ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ helyett csak a $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ vagy a $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$ határérték létezik és egyenlő $f(a)$-val.



2.8. ábra.

Ha a függvény egy adott, a-tól b-ig terjedő intervallum minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy *folytonos ezen az intervallumon*, amely lehet nyílt, félig-nyílt vagy zárt (lásd 2. old.). Ha a függvény a számegyenes minden pontjában értelmezve van és folytonos, akkor azt mondjuk, hogy *mindenütt folytonos*. Az értelmezési tartomány belsejében vagy határán elhelyezkedő $x = a$ érték a függvénynek *szakadási helye*, ha egy környezetében a függvény értelmezett, de ott nem, vagy $f(a)$ definiált, de nem egyezik meg a $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ határértékkel, vagy a határérték nem létezik, azaz, ha a-ban a függvény nem folytonos.

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának egy intervallumán *szakaszonként folytonos*, ha az intervallumnak véges sok kivételtől eltekintve minden pontjában folytonos.

2.1.5.3. Gyakran fellépő szakadásfajták

1. Függvénykifutás a végtelenbe A függvénykifutás a végtelenbe a leggyakrabban előforduló szakadásfajta (a **2.8. ábrán** a B, C és E pont); legalább az egyik oldali határérték $+\infty$ vagy $-\infty$.

■ **A:** $f(x) = \operatorname{tg} x\,,\ f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty\,,\ f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty$. A görbe a 77. oldalon a **2.33. ábrán** látható; a szakadás olyan típusú, mint a **2.8. ábra** E pontjában fellépő.

■ **B:** $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}\,,\ f(1-0) = +\infty\,,\ f(1+0) = +\infty$. A szakadási hely olyan, mint a **2.8. ábra** B pontja ($+\infty$ helyett $-\infty$-nel).

■ **C:** $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}\,,\ f(1+0) = 0\,,\ f(1-0) = \infty$. A szakadási hely olyan, mint a **2.8. ábra** C pontja, azzal a különbséggel, hogy az $f(x)$ függvény az $x = 1$ pontban nincs értelmezve.

2. Véges ugrás Az $x = a$ ponton való áthaladáskor az $f(x)$ függvény egy véges értékről egy másik véges értékre ugrik, tehát féloldali határértékei léteznek és különbözőek (a **2.8. ábrán** az A, F, G pontok). Az $f(x)$ függvény értéke az $x = a$ helyen nem kell, hogy definiálva legyen, ez a helyzet a G ponttal; az is lehetséges, hogy definiált, sőt megegyezik az $f(a-0)$ vagy az $f(a+0)$ értékkel (F pont), de az is, hogy mindkettőtől különbözik (A pont).

■ **A:** $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$ **(2.7. ábra)**.

■ **B:** $f(x) = E(x)$ **(2.1.a ábra)** $f(n-0) = n-1$, $f(n) = f(n+0) = n$ (n egész).

■ **C:** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}}$, $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$, de $f(1) = \frac{1}{2}$.

3. Megszüntethető szakadás A $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ határérték létezik, azaz $f(a-0) = f(a+0)$, de a függvény az $x = a$ helyen vagy nincs értelmezve, vagy $f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (a **2.8. ábrán** a D pont). Ezt a szakadást *megszüntethető*nek mondjuk, hiszen $f(a)$ értékét a $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ határértékkel definiálva, az $f(x)$ függvény folytonossá válik az $x = a$ helyen. A függvénygörbéhez ily módon hozzáteszünk egy pontot, illetve egy „leugrott" pontot visszaviszünk a görbére. Megszüntethető szakadásra példák a különféle határozatlan kifejezések, főleg amelyek a L'HOSPITAL-szabállyal vagy más ismertetett módszerekkel vizsgálhatók és a velük definiált függvénynek véges határértéke van.

■ $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$: az $x = 0$ helyen $\dfrac{0}{0}$ típusú határozatlan kifejezés adódik, de $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$; így

az $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvény folytonos.

2.1.5.4. Elemi függvények folytonossága és szakadási helyei

Az elemi függvények értelmezési tartományukban folytonosak; szakadási helyeik nem tartoznak az értelmezési tartományhoz. A következő általános kijelentések igazak:

1. A racionális egész függvények, más néven polinomok az egész számegyenesen folytonosak.

2. A racionális törtfüggvények (alakjuk $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ahol $P(x)$ és $Q(x)$ polinom) mindenütt folytonosak, kivéve esetleg azon x értékeket, amelyekre $Q(x) = 0$. Azokon az $x = a$ helyeken, ahol $Q(x) = 0$, de $P(x) \neq 0$, a függvény szakad, mindkét oldalról valamilyen ∞ a határértéke, a szakadási helyet *pólus*nak nevezzük, ha P-t és Q-t kiterjesztjük a komplex síkra. Ha az a érték a nevezőnek és a számlálónak is zérushelye, akkor csak abban az esetben pólus, ha zérushelyként a multiplicitása (lásd 42. old.) a nevezőben nagyobb, mint a számlálóban. Ellenkező esetben a szakadás megszüntethető.

3. Irracionális függvények Ezen belül a polinomok pozitív egész kitevőjű gyökei; az értelmezési tartomány egészén folytonosak. Ha ez a kitevő páros, akkor az értelmezési tartomány intervallumokból áll, amelyek mindegyik határpontját az határozza meg, hogy ott a gyökjel alatti polinom pozitív értékekről negatívakra vált át. Törtfüggvények (pl. ha a gyökkitevő negatív) gyökei is ebbe a függvényosztályba tartoznak, ezek az említett eseten kívül még azokra az x értékekre sem folytonosak, amelyek a gyökjel alatti függvény szakadási helyei.

4. Trigonometrikus függvények A $\sin x$ és a $\cos x$ függvény mindenütt folytonos; a $\operatorname{tg} x$ és a $\sec x$ függvénynek az $x = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ helyeken végtelen ugrása van; a $\operatorname{ctg} x$ és a $\operatorname{cosec} x$ függvénynek az $x = n\pi$ (n most is egész) helyeken van végtelen ugrása.

5. Inverz trigonometrikus függvények A $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ függvények mindegyik ága invertálható; speciálisan a főágaik inverzei: az $\operatorname{arctg} x$ és $\operatorname{arcctg} x$ függvény is mindenütt folytonos. Az $\arcsin x$, $\arccos x$ függvények értelmezési tartománya a $-1 \leq x \leq +1$ intervallum, mert ez a $\sin x$ a $\cos x$ főértékének, más szóval főágának (is) az értékkészlete és ezen inverzek is folytonosak az értelmezési tartomány minden pontjában.

6. Az e^x vagy általában a^x, $a > 0$ exponenciális függvény Mindenütt folytonos.

7. Tetszőleges pozitív alapú (az 1-et kivéve) log x logaritmusfüggvény A függvény minden pozitív x értékre folytonos, és az $x = 0$ helyen $\lim\limits_{x\to 0+0} \log x = -\infty$ miatt nem megszüntethető szakadása van.

8. Elemi függvények általában A folytonosságot az összetett kifejezésben fellépő egyes elemi függvényeknél "belülről kifelé" minden x értékre a fent ismertetett eseteknek megfelelően meg kell vizsgálni (lásd még Közvetett függvények, 60. old.).

■ Meghatározandók az $y = \dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x \sin \sqrt[3]{1-x}}$ függvény szakadási helyei. Az $\dfrac{1}{x-2}$ kitevőnek az $x = 2$ helyen végtelen ugrása van; $x = 2$-re $e^{\frac{1}{x-2}}$-nek is végtelen ugrása van: $\lim\limits_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = \infty$. Az y függvénynek az $x = 2$ helyen véges nevezője van. Következésképpen az $x = 2$ helyen olyan típusú végtelen ugrás lép fel, mint a **2.8. ábrán** a C pontban (180°-kal elforgatva).

Az $x = 0$ helyen a nevező nullává válik, hasonlóan azokhoz az x helyekhez, amelyeken $\sin \sqrt[3]{1-x}$ egyenlő nullával. Az utóbbiak a $\sqrt[3]{1-x} = n\pi$, azaz az $x = 1 - n^3\pi^3$ értékek, ahol n tetszőleges egész szám. A számláló ezen értékek egyikére sem nulla, úgyhogy a függvénynek az $x = 0$, $x = 1$, $x = 1 \pm \pi^3$, $x = 1 \pm 8\pi^3$, $x = 1 \pm 27\pi^3, \ldots$ helyeken mindkét oldalon ugyanolyan típusú szakadásai vannak, mint amilyen a **2.8. ábrán** az E pont jobboldali környezetében.

2.1.5.5. Folytonos függvények tulajdonságai

1. Folytonos függvények összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának folytonossága Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor ott $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$ és $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is folytonos függvény; a hányados esetében még fel kell tenni, hogy az intervallumban $g(x) \neq 0$.

2. Az $y = f(u(x))$ közvetett függvény folytonossága Ha $f(u)$ az u folytonos függvénye és $u(x)$ az x folytonos függvénye, továbbá $f(u)$ értelmezési tartománya tartalmazza $u(x)$ értékkészletét, akkor az $y = f(u(x))$ közvetett függvény x-re nézve folytonos, és fennáll $u(x)$ értelmezési tartományának bármely a pontjára — a végpontokban csak a megfelelő oldalról —, hogy

$$\lim_{x\to a} f(u(x)) = f\left(\lim_{x\to a} u(x)\right) = f(u(a))\,. \tag{2.25}$$

Ez azt jelenti, hogy egyváltozós folytonos függvény bármely folytonos függvénye szintén folytonos.

3. Bolzano tétele Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban értelmezve van és folytonos, és az intervallum végpontjaiban felvett $f(a)$, $f(b)$ függvényértékek különböző előjelűek, akkor létezik legalább egy c érték, amelyre $f(x)$ egyenlő nullával:

$$f(c) = 0, \quad \text{ahol} \quad a < c < b\,. \tag{2.26}$$

Geometriailag ez azt fejezi ki, hogy folytonos függvény görbéje az x-tengely egyik oldaláról a másik oldalára való átmenet során legalább egyszer metszi az x-tengelyt.

4. Középértéktétel Eszerint, ha az $f(x)$ függvény egy intervallumban értelmezve van és folytonos, továbbá az intervallum két a, b pontjában (legyen pl. $a < b$) különböző A, B értékeket vesz fel, azaz

$$f(a) = A\,, \quad f(b) = B\,, \quad A \neq B\,, \tag{2.27a}$$

akkor az A és B közötti minden C számhoz található a és b között legalább egy c pont, amelyre teljesül

$$f(c) = C \quad (a < c < b\,, \quad A < C < B \text{ vagy } A > C > B). \tag{2.27b}$$

Másképpen kifejezve: A folytonos $f(x)$ függvény minden A és B közötti értéket legalább egyszer felvesz.

5. Inverz függvény létezése Ha az $f(x)$ függvény az I intervallumon értelmezve van, folytonos és szigorúan növekszik vagy csökken (lásd a két illusztrációt), akkor a függvénynek van folytonos, szintén szigorúan növekedő, ill. csökkenő $\varphi(x)$ inverz függvénye (lásd még 51. old.), amely az $f(x)$ függvény által felvett értékek mindig intervallumot adó II tartományában van értelmezve **(2.9. ábra)**, és általában is függvény és inverze grafikonja egymásból az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel kapható meg.

a) b)

2.9. ábra.

6. Folytonos függvény korlátosságáról szóló tétel Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban értelmezve van és ott folytonos, akkor ebben az intervallumban korlátos is, azaz található két m, M szám úgy, hogy

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \text{ha} \quad a \leq x \leq b. \tag{2.28}$$

7. Weierstrass tétele Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt intervallumban értelmezve van és folytonos, akkor a függvénynek ott létezik egy M abszolút maximuma és egy m abszolút minimuma, vagyis az intervallumban található legalább egy c és legalább egy d pont úgy, hogy $a \leq x \leq b$ esetén

$$m = f(d) \leq f(x) \leq f(c) = M\,. \tag{2.29}$$

Egy folytonos függvény legnagyobb és legkisebb értéke közötti különbséget a függvény *ingadozás*ának nevezzük a megadott intervallumon. Függvény adott intervallumon vett ingadozásának fogalma kiterjeszthető olyan függvényekre is, amelyeknek ott nincs legnagyobb vagy legkisebb értékük (amelyek szerepét átveszi a legkisebb felső korlát, azaz szuprémum [sup], illetve a legnagyobb alsó korlát, azaz infimum [inf]) (lásd [22.16], 3. kötet).

2.2. Elemi függvények

Az *elemi függvényeket* olyan képletek definiálják, amelyekben véges sok, a független változóval és konstansokkal elvégzendő művelet szerepel. Műveleten itt a négy alapművelet, hatványozás tehát gyökvonás is értendő; felhasználható továbbá az exponenciális, a logaritmusfüggvény, valamint a trigonometrikus függvények és a függvénykompozíció, továbbá az inverz függvények képzése, minden olyan intervallumon, ahol "belülről kifelé" haladva a kapott függvények mindegyike definiált. Az elemi függvények *algebrai* — ezen belül racionális és irracionális — és *transzcendens* függvényekre oszthatók fel.
Elemi függvényeken kívül *nem elemi függvényeket* is lehet definiálni pl. az analízis ismert eszközeivel (lásd pl. 467. old.).

2.2.1. Algebrai függvények

Az *algebrai függvényeket* az jellemzi, hogy az x argumentumot az y függvénnyel egy

$$p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 + \ldots + p_n(x)y^n = 0 \tag{2.30}$$

alakú *algebrai egyenlet* kapcsolja össze, ahol $p_0, p_1, \ldots, p_n$ az x változó polinomjai.

■ $3xy^3 - 4xy + x^3 - 1 = 0$, azaz $p_0(x) = x^3 - 1$, $p_1(x) = -4x$, $p_2(x) = 0$, $p_3(x) = 3x$.

Ha sikerül a (2.30) algebrai egyenletből algebrai alapműveletekkel y-t kifejezni, akkor a következő, legegyszerűbb algebrai függvénytípusok valamelyikével van dolgunk (amelyek közül az első két típust együtt racionális függvényeknek hívjuk):

2.2.1.1. Racionális egész függvények (polinomok)

Az x argumentummal csak összeadást, kivonást és szorzást kell végezni.

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\,. \tag{2.31}$$

Speciálisan az $y = a$ függvényt *állandó*nak, az $y = ax + b$ függvényt *lineáris függvény*nek, az $y = ax^2 + bx + c$ függvényt pedig *másodfokú* vagy *kvadratikus* függvénynek nevezzük.

2.2.1.2. Racionális törtfüggvények

Racionális törtfüggvény az, amelyik előállítható két racionális egész függvény hányadosaként:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}. \tag{2.32a}$$

Speciálisan az

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{2.32b}$$

függvények a *lineáris törtfüggvények*.

2.2.1.3. Irracionális függvények

A racionális törtfüggvényeknél említett műveleteken kívül itt az x argumentum még gyökjel alatt is felléphet, másképpen szólva a függvényt megadó formulában szerepelhet racionális kitevőjű hatványozás is.

■ **A:** $y = \sqrt{2x + 3}$, ■ **B:** $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)\sqrt{x}}$.

2.2.2. Transzcendens függvények

A *transzcendens függvények* nem írhatók le (2.30) típusú algebrai egyenlettel. A következőkben bemutatjuk a legegyszerűbb transzcendens elemi függvényeket.

2.2.2.1. Exponenciális függvények

Az exponenciális függvényeknél (lásd 72. old.) az x argumentum vagy annak egy algebrai függvénye a kitevőben fordul elő.

■ **A:** $y = e^x$, ■ **B:** $y = a^x$, $(a > 0)$ ■ **C:** $y = 2^{3x^2 - 5x}$.

2.2.2.2. Logaritmusfüggvények

A logaritmusfüggvényeknél (lásd 72. old.) az x argumentum vagy annak egy algebrai függvénye a logaritmusjel alatt fordul elő.

■ **A:** $y = \ln x$, ■ **B:** $y = \lg x$, ■ **C:** $y = \log_2(5x^2 - 3x)$.

2.2.2.3. Trigonometrikus függvények

A trigonometrikus függvényeknél (lásd 75. old.) az x argumentum vagy annak egy algebrai függvénye a sin, cos, tg, ctg, sec, cosec valamelyikébe van behelyettesítve.

■ **A:** $y = \sin x$, ■ **B:** $y = \cos(2x + 3)$, ■ **C:** $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Vegyük figyelembe, hogy a trigonometrikus függvények argumentumát nem közvetlenül szögben mérjük, mint a geometriai definíciónál, hanem radiánban, ami bármilyen valós szám lehet. A trigonometrikus függvények geometriai szemlélet nélkül, tisztán analitikus módon is definiálhatók. Megtehetjük pl., hogy e függvényeket sorfejtéssel állítjuk elő, vagy megoldjuk a $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ differenciálegyenletet az $x = 0$ helyre vonatkozó $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 1$ kezdeti feltételek mellett, aminek a $\sin x$ az egyedüli megoldása. Ha nem jelöljük másként, trigonometrikus függvények argumentuma számszerűen a szög radiánjával, másképp *ívmérték*ével egyezik meg.

2.2.2.4. Inverz trigonometrikus függvények

Az x változó vagy annak egy algebrai függvénye az arcsin, arccos stb. inverz trigonometrikus függvények (lásd 85. old.) argumentumában lép fel.

■ **A:** $y = \arcsin x$, ■ **B:** $y = \arccos\sqrt{1 - x}$.

2.2.2.5. Hiperbolikus függvények

(Lásd 89. old.)

2.2.2.6. Inverz hiperbolikus függvények

(Lásd 93. old.)

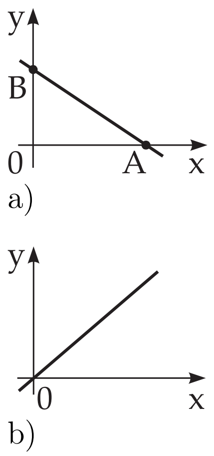
Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy az elemi függvények halmaza a felsoroltakból kiindulva az említett műveletek véges sokszori alkalmazásával adódó függvények összessége.

■ **A:** $y = \ln \sin x\,,$ ■ **B:** $y = \dfrac{\ln x + \sqrt{\arcsin x}}{x^2 + 5e^x}\,.$

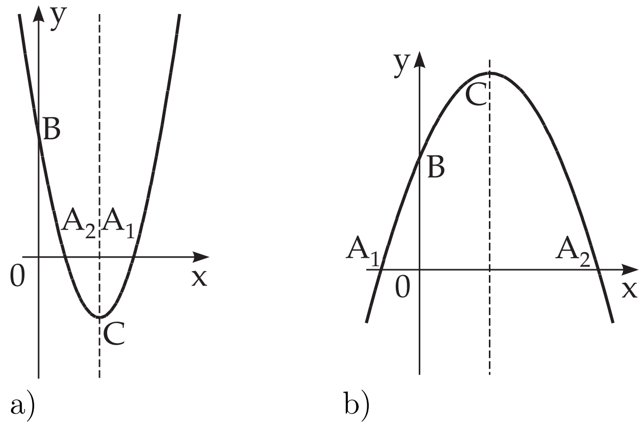
2.3. Polinomok

2.3.1. Lineáris függvény

Az
$$y = ax + b \tag{2.33}$$
lineáris függvény grafikus ábrázolása *egyenest* ad **(2.10.a ábra)**.
Ha $a > 0$, a függvény monoton növekszik, ha pedig $a < 0$, akkor monoton csökken; $a = 0$ esetén a függvény konstans. A tengelyekkel való metszéspontok $A(-b/a, 0)$ és $B(0, b)$ (részletesebben lásd 193. old.). A $b = 0$ esetben az
$$y = ax, \qquad \textit{egyenes arányosságot} \tag{2.34}$$
kapjuk, amelynek ábrája egy, a kezdőponton átmenő egyenes **(2.10.b ábra)**.



2.10. ábra.



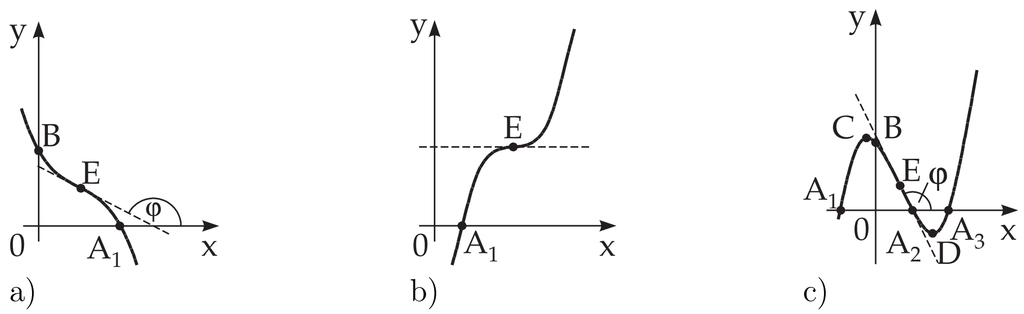
2.11. ábra.

2.3.2. Másodfokú polinom

Az
$$y = ax^2 + bx + c \tag{2.35}$$
másodfokú racionális egész függvény grafikus ábrázolása olyan *parabolát* ad, amelynek függőleges szimmetriatengelye az $x = -b/2a$ helyen metszi az x-tengelyt **(2.11. ábra)**. Ha $a > 0$, akkor a függvény a $-\infty$-ből indulva először csökken, elér egy minimumot, majd a $+\infty$-ig növekszik. Ha $a < 0$, akkor a függvény felcserélt értékhatárokkal először növekszik, elér egy maximumot, utána pedig csökken. Az x-tengellyel való A_1, A_2 metszéspontok $\left(\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$, az y-tengellyel való B metszéspont $(0, c)$.
A szélsőérték-pont $C\left(-\dfrac{b}{2a}\,, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ (a paraboláról részletesebben lásd 203. old.).

2.3.3. Harmadfokú polinom

Az
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{2.36}$$
harmadfokú racionális egész függvény görbéje egy *harmadfokú parabola* (**2.12.a, b, c ábrák**).



2.12. ábra.

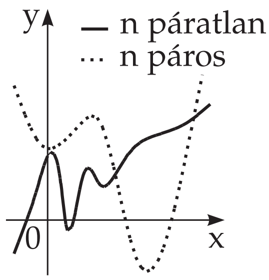
A függvény viselkedése a-tól és a $\Delta = 3ac - b^2$ diszkriminánstól függ. Ha $\Delta \geq 0$ (**2.12.a, b ábrák**), akkor a függvény $a > 0$ esetén monoton növekszik, $a < 0$ esetén monoton csökken. Ha $\Delta < 0$, akkor a függvénynek egy maximuma és egy minimuma van (**2.12.c ábra**): Ebben az esetben, ha $a > 0$, akkor a függvény $-\infty$-ről a maximumra növekszik, majd a minimumra csökken, végül $+\infty$-ig növekszik; ha $a < 0$, akkor $+\infty$-ről a minimumra csökken, utána a maximumra növekszik, majd $-\infty$-re csökken. Az x-tengellyel való metszéspontok mint a (2.36)-ból $y = 0$ helyettesítéssel kapott egyenlet valós gyökei számíthatók ki. A valós gyökök száma lehet egy, kettő (ekkor egy gyök kétszeres és abban a pontban érintkezés van) vagy három: A_1, A_2 és A_3 . Az x-tengellyel való metszéspont $B(0, d)$, a C, D szélsőérték-pontok — a $\pm$-ok értéke azonos kell, hogy legyen — $\left(-\dfrac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a}, \dfrac{d + 2b^3 - 9abc \pm (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right)$. Az inflexiós pont, amely egyúttal a görbe szimmetriapontja, $E\left(-\dfrac{b}{3a}, \dfrac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$. Ebben a pontban az érintő iránytangense $\operatorname{tg}\varphi = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_E = \dfrac{\Delta}{3a}$.

2.3.4. n-edfokú polinom

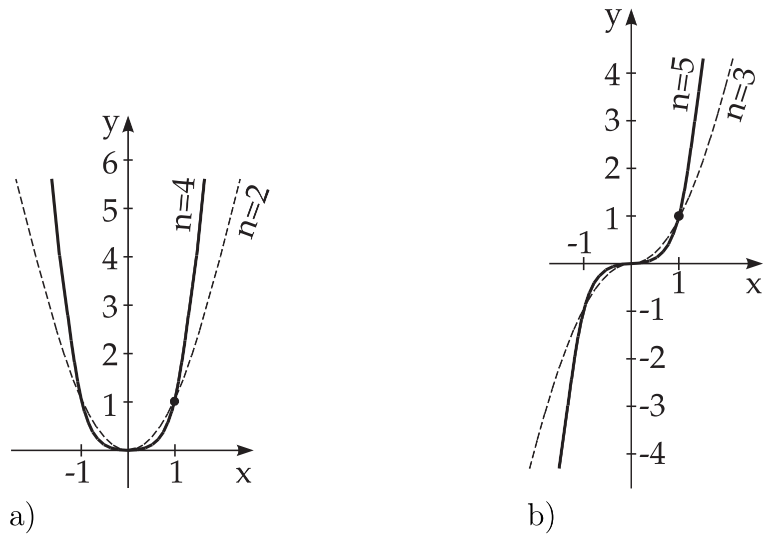
Az $\quad y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ (2.37)

n-edfokú racionális egész függvény ábrája *parabolikus típusú n-edfokú görbe* (**2.13. ábra**; lásd 193. old.).
1. eset: *n* páratlan Ha $a_n > 0$, akkor y folytonosan halad $-\infty$ felől $+\infty$ felé, ha pedig $a_n < 0$, akkor $+\infty$ felől $-\infty$ felé. Az x-tengelyt a görbe legfeljebb n-szer metszheti, ill. érintheti (n-edfokú egyenletek megoldásáról lásd a 42 és a rákövetkező oldalakat, valamint a 910. oldalt). A (2.37) függvénynek vagy nincs szélsőértéke, vagy páros számú és $(n-1)$-nél nem több szélsőértéke van, amelyek váltakozva minimumok és maximumok; az inflexiós pontok száma páratlan, amely 1 és $n-2$ közé esik. Aszimptoták és szinguláris pontok nincsenek.

2. eset: *n* páros Ha $a_n > 0$, akkor y folytonosan halad $+\infty$ felől $+\infty$ felé, ha pedig $a_n < 0$, akkor $-\infty$ felől $-\infty$ felé. A görbe az x-tengelyt legfeljebb n-szer metszheti, ill. érintheti; a maximumok és minimumok váltakozva fordulnak elő, páratlan sok van belőlük, és legfeljebb $n - 1$; az inflexiós pontok száma páros, amely most is 1 és $n - 2$ közé esik. Aszimptoták és szinguláris pontok nincsenek.
A görbe megrajzolása előtt ajánlatos először a szélsőértékeket, inflexiós pontokat és az első derivált ezen pontokban felvett értékét meghatározni, utána berajzolni a görbe itteni érintőit, végül pedig mindezen pontokat folytonosan összekötni egymással. Az alábbiakban az $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$ speciális esettel foglalkozunk.



2.13. ábra.



2.14. ábra.

2.3.5. n-edrendű parabola

Az
$$y = ax^n \tag{2.38}$$
függvény görbéje egy *n-edrendű parabola* ($n > 0$ egész szám) **(2.14. ábra)**.
1. Az $a = 1$ speciális eset: Az $y = x^n$ görbe átmegy a $(0, 0)$, $(1, 1)$ pontokon, és érinti vagy metszi az x-tengelyt a koordinátarendszer kezdőpontjában. Páros n esetén az y-tengelyre szimmetrikus görbét kapunk, amelynek a kezdőpontban minimuma van. Páratlan n esetén a görbe centrálisan szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára, és ez a pont egyben inflexiós pont is. Aszimptota nincs.
2. Az $a \neq 0$ általános eset:
Az $y = ax^n$ görbét az $y = x^n$ függvény görbéjéből az abszcisszák $|a|$-szeres megnyújtásával kapjuk. Ha $a < 0$, az $y = |a|x^n$ görbét tükrözzük az x–tengelyre.

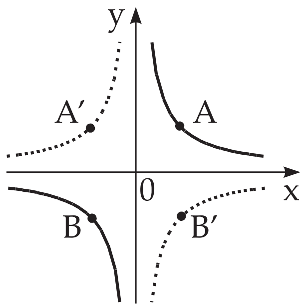
2.4. Racionális törtfüggvények

2.4.1. Fordított arányosság

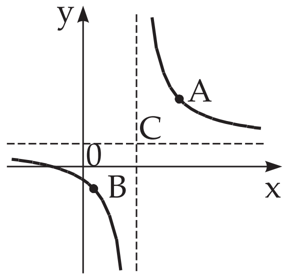
Az
$$y = \frac{a}{x}, \quad a \neq 0 \tag{2.39}$$
függvény görbéje olyan *egyenlő oldalú hiperbola*, amelynek a koordinátatengelyek az aszimptotái **(2.15. ábra)**. Az $x = 0$ helyen $y = \pm\infty$ típusú szakadás van. Ha $a > 0$, akkor a függvény 0-ról $-\infty$-re és $+\infty$-ről 0-ra csökken (folytonosan rajzolt vonal az 1. és 3. síknegyedben). Ha $a < 0$, akkor a függvény 0-ról $+\infty$-re és $-\infty$-ről 0-ra növekszik (szaggatott vonal a 2. és 4. síknegyedben). Az A, B, illetve A', B' $\left(\pm\sqrt{|a|}, +\sqrt{|a|}\right)$ és $\left(\pm\sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|}\right)$ a görbe két ágának szimmetria-középpontja, ahol mindkét esetben a zárójelbeli vessző két oldalán $a > 0$ esetén az egyező, $a < 0$ esetén pedig az ellentétes előjelek veendők. Szélsőértékek nincsenek (a hiperboláról részletesebben lásd 200. old.).

1. Lineáris törtfüggvény

Az
$$y = \frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}, \tag{2.40}$$
(ahol a_2 és az $a_1b_2 - b_1a_2$ determináns $\neq 0$) függvény görbéje olyan *egyenlő oldalú hiperbola*, amelynek az aszimptotái — $y = \dfrac{a_1}{a_2}$, ill. $x = -\dfrac{b_2}{a_2}$ — párhuzamosak a koordinátatengelyekkel **(2.16. ábra)**. A görbe



2.15. ábra.



2.16. ábra.

szimmetria-középpontja $C\left(-\dfrac{b_2}{a_2}, \dfrac{a_1}{a_2}\right)$. A (2.39) egyenlet a paraméterének a $-\dfrac{\Delta}{{a_2}^2}$ érték felel meg, ahol $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. A hiperbola két ágának A, B szimmetria-középpontjai $\left(-\dfrac{b_2 \pm \sqrt{|\Delta|}}{a_2}, \dfrac{a_1 + \sqrt{|\Delta|}}{a_2}\right)$ és $\left(-\dfrac{b_2 \pm \sqrt{|\Delta|}}{a_2}, \dfrac{a_1 - \sqrt{|\Delta|}}{a_2}\right)$, ahol mindkét esetben a vessző két oldalán $\Delta > 0$ esetén az egyező, $\Delta < 0$ esetén az ellentétes előjelek veendők. A szakadási hely $x = -\dfrac{b_2}{a_2}$. Ha $\Delta < 0$, a függvény $\dfrac{a_1}{a_2}$-ről $-\infty$-re és $+\infty$-ről $\dfrac{a_1}{a_2}$-re csökken (az ábra ezt az esetet mutatja). Ha $\Delta > 0$, a függvény $\dfrac{a_1}{a_2}$-ről $+\infty$-re és $-\infty$-ről $\dfrac{a_1}{a_2}$-re növekszik. Szélsőértékek nincsenek.

Most néhány olyan racionális függvénnyel foglalkozunk, ahol a számláló és a nevező legalább egyike másodfokú, és egyikük sem magasabb fokú.

2.4.2. Harmadrendű görbe, I. típus

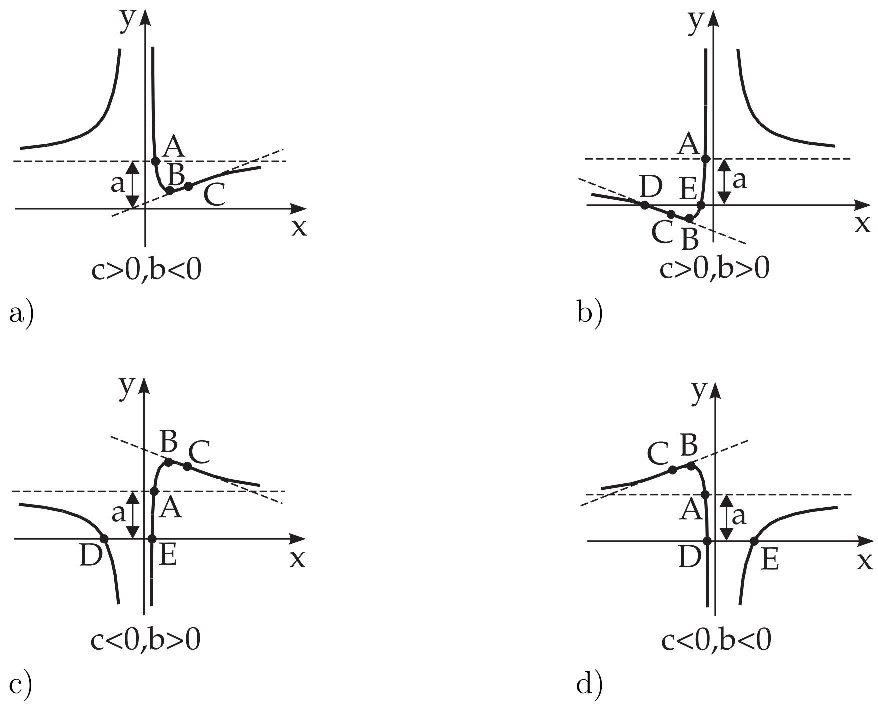
Az $$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \quad \left(= \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}\right) \quad (b \neq 0\,, \;\; c \neq 0) \tag{2.41}$$

függvény **(2.17. ábra**, $a > 0$ eset**)** harmadrendű görbét (I. típus) ír le. Ennek két aszimptotája van, $x = 0$ (c előjelétől függően az y-tengely pozitív, ill. negatív fele) és $y = a$, és két ágból áll, amelyek egyike mentén y monoton a és $+\infty$, ill. $-\infty$ értékhatárok között, míg a másik ág három jellegzetes ponton megy át: az aszimptotával való $A\left(-\dfrac{c}{b}\,, a\right)$ metszésponton, a $B\left(-\dfrac{2c}{b}\,, a - \dfrac{b^2}{4c}\right)$ szélsőérték-ponton és a $C\left(-\dfrac{3c}{b}\,, a - \dfrac{2b^2}{9c}\right)$ inflexiós ponton. Ezen ágak helyzete b és c előjelétől függően négyféle lehet **(2.17. ábra)**. Az x-tengellyel való D, E metszéspontok $\left(\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$; számuk lehet kettő, egy (érintkezés) vagy nulla aszerint, amint $b^2 - 4ac > 0\,,\; = 0$ vagy < 0.

A (2.41) függvény $b = 0$ esetén az $y = a + \dfrac{c}{x^2}$ függvénybe (lásd a reciprok hatvány **2.20. ábráját**, $a = 0$ eset), $c = 0$ esetén pedig a már tárgyalt $y = \dfrac{ax + b}{x}$ lineáris törtfüggvénybe, (2.40) speciális esetébe megy át.

2.4.3. Harmadrendű görbe, II. típus

Az $$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,, \quad a \neq 0 \tag{2.42}$$



2.17. ábra.

függvény *harmadrendű görbét* (II. típus) ír le, amely szimmetrikus az $x = -\dfrac{b}{2a}$ függőleges egyenesre, és amelynek aszimptotája az x-tengely **(2.18. ábra)**. Viselkedése a és $\Delta = 4ac - b^2$ előjelétől függ. Az $a > 0$ és $a < 0$ eset közül csak az elsővel foglalkozunk, mert a második az $y = \dfrac{1}{(-a)x^2 - bx - c}$ függvény görbéjének az x-tengelyre való tükrözésével adódik.

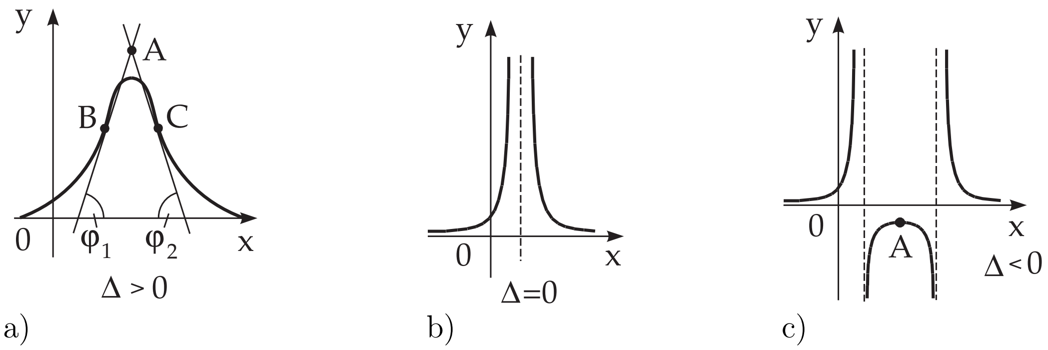
a) eset, $\boldsymbol{\Delta > 0}$: A függvény minden x-re pozitív és folytonos; $x = -\infty$-ből indulva 0-ról a maximumra növekszik, majd megint 0-ra csökken. Az A maximumpont $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4a}{\Delta}\right)$, a B, C inflexiós pontok $\left(-\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}}, \dfrac{3a}{\Delta}\right)$; az utóbbiakhoz tartozó *iránytangensek* $\operatorname{tg}\varphi = \pm a^2\left(\dfrac{3}{\Delta}\right)^{3/2}$ **(2.18.a ábra)**.

b) eset, $\boldsymbol{\Delta = 0}$: A függvény minden x-re pozitív, $x = -\infty$-ből indulva 0-ról $+\infty$-re növekszik, az $x = -\dfrac{b}{2a}$ helytől balra és jobbra folytonos, itt mindkét irányból $y = +\infty$ típusú szakadása van, és innen kezdve megint 0-ra csökken **(2.18.b ábra)**.

c) eset, $\boldsymbol{\Delta < 0}$: A függvény $x = -\infty$-ből indulva 0-ról $+\infty$-ig növekszik, a szakadási helyen átugrik $-\infty$-re, innen egy maximumon keresztül újra $-\infty$ felé megy, ahonnan $+\infty$-re ugrik, végül $+\infty$-ben határértékben 0-ra csökken. Az A maximumhely $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4a}{\Delta}\right)$; a szakadási helyek $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$, ezen kívül folytonos **(2.18.c ábra)**.

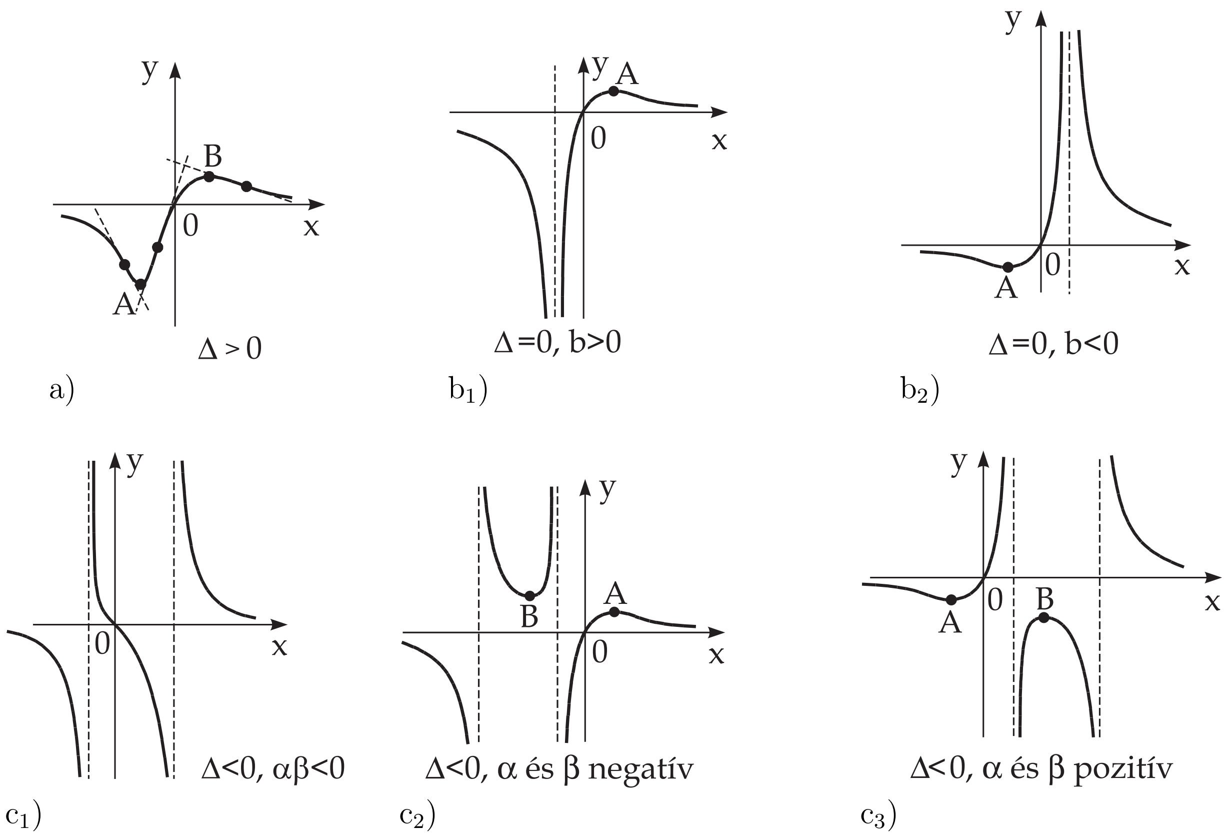
2.4.4. Harmadrendű görbe, III. típus

Az
$$y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}, \quad a \neq 0 \tag{2.43}$$
függvény *harmadrendű görbét* (III. típus) ír le, amely átmegy a koordinátarendszer kezdőpontján, és



2.18. ábra.

amelynek aszimptotája az x-tengely **(2.19. ábra)**. A függvény menete függ a és $\Delta = 4ac - b^2$ előjelétől, valamint $\Delta < 0$ esetén az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet α, β gyökeinek előjelétől, $\Delta = 0$ esetén pedig b előjelétől. Az $a > 0$ és $a < 0$ eset közül csak az elsővel foglalkozunk, mert a második az $y = \dfrac{x}{(-a)x^2 - bx - c}$ függvény görbéjének az x-tengelyre való tükrözésével adódik.



2.19. ábra.

a) eset, $\boldsymbol{\Delta > 0}$: Emiatt $c > 0$, a függvény folytonos, $x = -\infty$-ből indulva negatív értékeken át határértékben 0-ról a minimumra csökken, utána — 0-tól jobbra pozitív értékeken át — a maximumra növekszik, majd határértékben újra 0-ra csökken.

Az A, B szélsőérték-pontok $\left(\pm\sqrt{\dfrac{c}{a}},\ \dfrac{1}{b \pm (a+c)}\right)$; ezenkívül három inflexiós pont van **(2.19.a ábra)**.

b) eset, $\boldsymbol{\Delta = 0}$: A görbe menete b előjelétől függ (ha $b = 0$, akkor c is 0 és a már tárgyalt hiperbolát kapnánk vissza; emiatt $b \neq 0$ és ekkor $c > 0$):

• $b > 0$: A függvény 0-ról $-\infty$-re csökken, van egy szakadási helye, amely után $-\infty$-ről a maximumra növekszik, majd 0-ra csökken **(2.19.b$_1$ ábra)**. A maximumpont $A\left(+\sqrt{\dfrac{c}{a}}, \dfrac{1}{b+a+c}\right)$.

• $b < 0$: A függvény 0-ról a minimumra csökken, majd átmegy a kezdőponton, ezután 0-ról $+\infty$-re növekszik, van egy szakadási helye, végül $+\infty$-ről 0-ra csökken **(2.19.b$_2$ ábra)**. A minimumpont $A\left(-\sqrt{\dfrac{c}{a}}, -\dfrac{1}{b-(a+c)}\right)$.

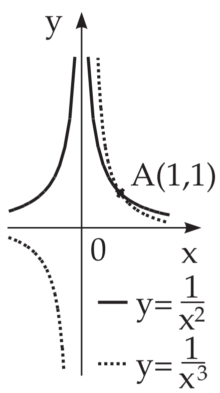
A szakadási hely mindkét esetben $x = -\dfrac{b}{2a}$, azon kívül a függvény folytonos; mindkét görbének egy inflexiós pontja van.

c) eset, $\boldsymbol{\Delta < 0}$: A függvénynek két szakadási helye van, $x = \alpha$ és $x = \beta$; a függvény menete α és β előjelétől függ.

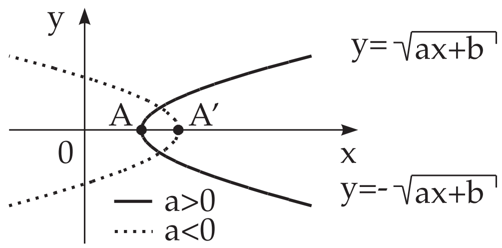
• α és β előjele különböző: A függvény 0-ról $-\infty$-re csökken, átugrik $+\infty$-re, $+\infty$-ről megint $-\infty$-ig csökken és közben áthalad a kezdőponton, másodszor is $+\infty$-re ugrik, majd onnan 0-ra csökken **(2.19.c$_1$ ábra)**. Szélsőértékek nem lépnek fel.

• α és β előjele negatív: A függvény 0-ról $-\infty$-ig csökken, átugrik $+\infty$-re, innen egy minimumon keresztül újra $+\infty$ felé halad, átugrik $-\infty$-re, egy maximumig növekszik, végül aszimptotikusan 0-ra csökken **(2.19.c$_2$ ábra)**.
Az A, B szélsőértékhelyek ugyanazokkal a képletekkel számíthatók ki, mint az **a)** esetben.

• α és β előjele pozitív: A függvény 0-ról a minimumra csökken, majd $+\infty$-ig növekszik, átugrik $-\infty$-re, áthalad egy maximumon és újra $-\infty$-hez tart, átugrik $+\infty$-re, végül pedig 0-hoz tart **(2.19.c$_3$ ábra)**.
Az A, B szélsőértékhelyek ugyanazokkal a képletekkel számíthatók ki, mint az **a)** esetben.
Mindhárom utóbbi esetben a görbének egy inflexiós pontja van. A szélsőértékhelyek képletében szereplő nevezőkről mindegyik esetben elemi számolással kimutatható, hogy nem lehetnek 0-k.



2.20. ábra.



2.21. ábra.

2.4.5. Reciprok hatvány

Az
$$y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n} \quad (n > 0, \ \text{egész}) \tag{2.44}$$
függvény *hiperbolikus típusú görbét* ír le, amelynek a koordinátatengelyek vagy féltengelyek lehetnek az aszimptotái. A szakadási hely $x = 0$ **(2.20. ábra)**.

a) eset Ha $\boldsymbol{a > 0}$, akkor páros n esetén a függvény $x = -\infty$-ből indulva határértékben 0-ról $+\infty$-ig növekszik, majd 0-ra csökken, és közben mindig pozitív marad. Páratlan n esetén a függvény 0-ról $-\infty$-ig csökken, 0-ban felugrik $+\infty$-re, majd 0-ra csökken.

b) eset Ha $\boldsymbol{a < 0}$, akkor páros n esetén a függvény 0-ról $-\infty$-ig csökken, ettől kezdve pedig 0 felé tart, miközben mindig negatív marad. Páratlan n esetén a függvény 0-ról $+\infty$-ig növekszik, átugrik $-\infty$-re, majd 0-ra növekszik.
A függvénynek nincsenek sem szélsőértékei, sem inflexiós pontjai. A görbe annál gyorsabban közeledik aszimptotikusan az x-tengelyhez és annál lassabban az y-tengelyhez, minél nagyobb az n szám. Páros n esetén a görbe szimmetrikus az y-tengelyre, páratlan n esetén pedig centrálisan szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára. A **2.20. ábra** az $a = 1$, $n = 2$ és $n = 3$ esetet tünteti fel.

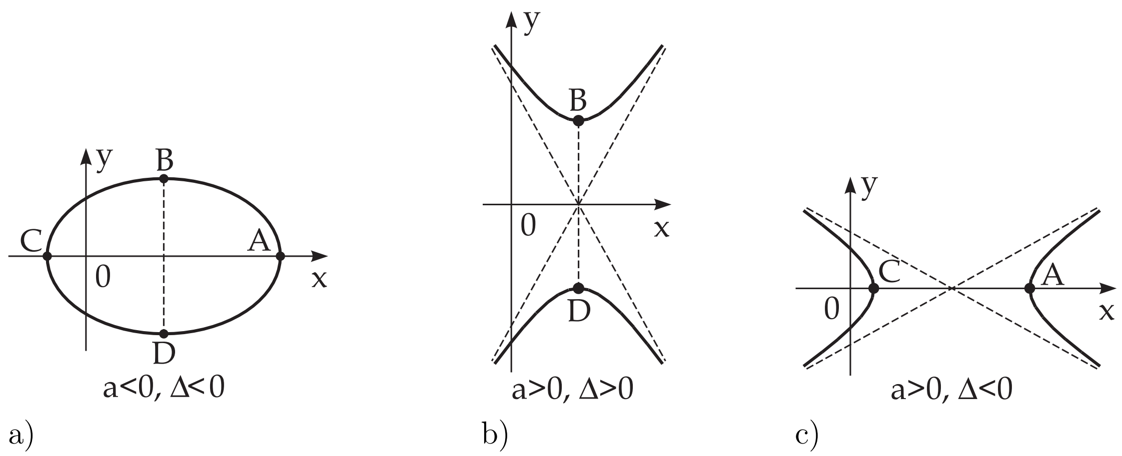
2.5. Irracionális függvények

2.5.1. Lineáris binom négyzetgyöke

A két
$$y = \pm\sqrt{ax + b}\,, \quad a \neq 0 \tag{2.45}$$
függvény együtt egy *parabolát* ír le, amelynek a szimmetriatengelye az x-tengely. Az A csúcspont helye $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$, a *félparaméter*, azaz a parabola paraméterének a fele $p = \dfrac{a}{2}$. Az értelmezési tartomány $\left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right]$, ill. $\left[-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$, aszerint, hogy $a < 0$ vagy $a > 0$ **(2.21. ábra)** (a paraboláról részletesebben lásd 203. old.).

2.5.2. Másodfokú polinom négyzetgyöke

A két
$$y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}\,, \quad a \neq 0 \tag{2.46}$$
függvény együtt $a < 0$ esetén *ellipszist*, $a > 0$ esetén *hiperbolát* ír le **(2.22. ábra)**. A két tengely közül az egyik egybeesik az x-tengellyel, a másik az $x = -\dfrac{b}{2a}$ egyenes.
Az A, C és B, D csúcspontok $\left(-\dfrac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}, 0\right)$ és $\left(-\dfrac{b}{2a}, \pm\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a}}\right)$, ahol $\Delta = 4ac - b^2$.



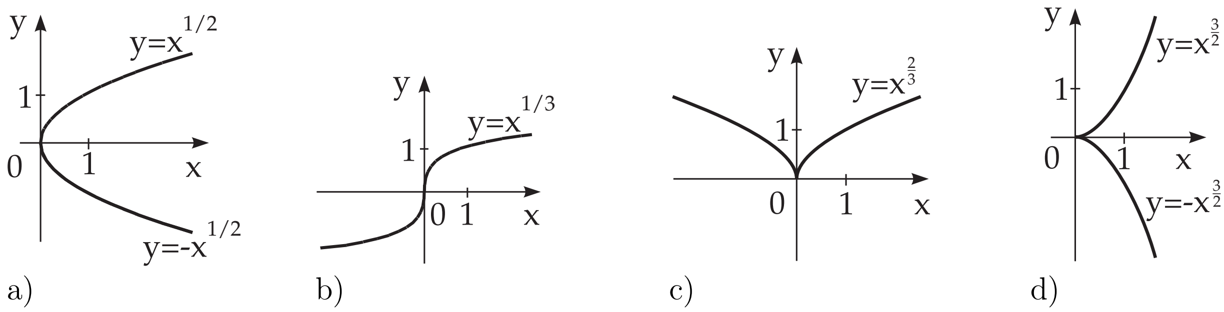
2.22. ábra.

A függvények értelmezési tartománya és menete a és Δ előjelétől függ **(2.22. ábra)**. Ha $a < 0$ és $\Delta > 0$, akkor a függvényeknek csak képzetes értékeik vannak, úgyhogy ilyenkor a görbe nem létezik (az ellipszisről és hiperboláról részletesebben lásd 197 és 200. old.). Ha $\Delta = 0$, akkor két egyenest kapunk, amelyek egymás tükörképei az x-tengelyre vonatkozóan.

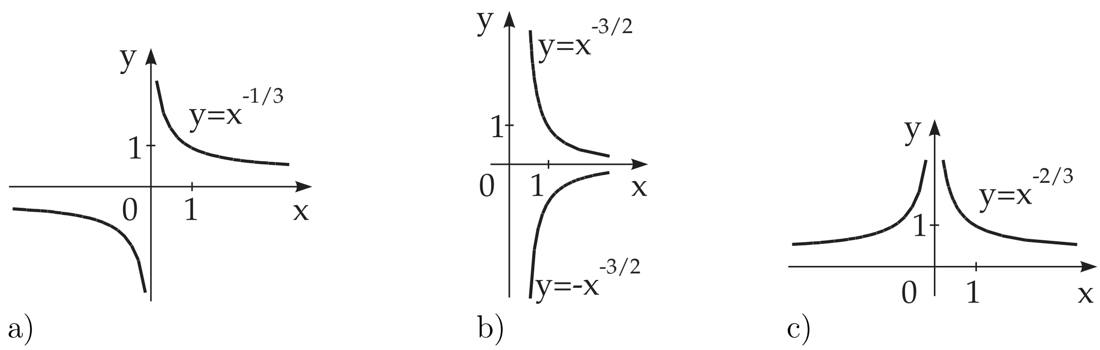
2.5.3. Hatványfüggvény

$$\text{Az} \quad y = ax^k = ax^{\pm m/n} \quad m\,, n \text{ pozitív egész, relatív prím számok}\,, \quad a \neq 0 \tag{2.47}$$

hatványfüggvényt a $k > 0$ és a $k < 0$ esetben külön-külön kell tárgyalni **(2.23. ábra)**. Feltehetjük, hogy $a = 1$, mert $a \neq 1$ esetén $y = x^k$ görbéjét elég az y-tengely irányában $|a|$-szeresre megnyújtani és negatív a esetén az x-tengelyre tükrözni; ezt is illusztrálja a **2.23.a,d** és a **2.24.b ábra**.



2.23. ábra.



2.24. ábra.

a) eset, $\boldsymbol{k > 0}$, $\boldsymbol{y = x^{m/n}}$: A görbe menetét az m és n mennyiségek négy jellegzetes megválasztása mellett a **2.23. ábra** tünteti fel. A görbe minden esetben átmegy a $(0, 0)$ és az $(1, 1)$ ponton. Ha $k > 1$, a kezdőpontban a görbe érinti az x-tengelyt **(2.23.d ábra)**, ha pedig $k < 1$, akkor, szintén a kezdőpontban, az y-tengelyt **(2.23.a,b,c ábrák)**. Páros n esetén két, az x-tengelyre szimmetrikus folytonos ág **(2.23.a,d ábrák)**, páros m esetén pedig két, az y-tengelyre szimmetrikus folytonos ág van **(2.23.c ábra)**. Páratlan m és n esetén a görbe centrálisan szimmetrikus a koordinátarendszer kezdőpontjára **(2.23.b, 2.24.a ábra)**. A kezdőpontban tehát a görbének lehet csúcsa, inflexiós pontja vagy visszatérő pontja **(2.23. ábra)**. Aszimptotája nincs. Ha n páros, akkor az értelmezési tartomány $[0, \infty)$, egyébként az egész $\mathbb{R}$; az első esetben minden ág szélsőértéke és -helye a 0, a második esetben pontosan akkor, ha m páros, egyébként nincs.
b) eset, $\boldsymbol{k < 0}$, $\boldsymbol{y = x^{-m/n}}$: A **2.24. ábrán** a görbe menete az m, n mennyiségek három jellegzetes megválasztása mellett van feltüntetve. A görbe hiperbolikus típusú, és aszimptotái egybeesnek a koordinátatengelyekkel, pontosabban folytonos áganként egy-egy féltengellyel **(2.24. ábra)**. Minden ág szakadási helye $x = 0$. A görbe az x-tengelyhez annál gyorsabban, az y-tengelyhez pedig annál lassabban közeledik aszimptotikusan, minél nagyobb a $|k|$ szám. A görbe menete és a koordinátatengelyekre, ill. a kezdőpontra vonatkozó szimmetria, ugyanúgy mint a $k > 0$ esetben, attól függ, hogy m és n páros vagy páratlan. Szélsőérték nincs.

2.6. Exponenciális és logaritmusfüggvények

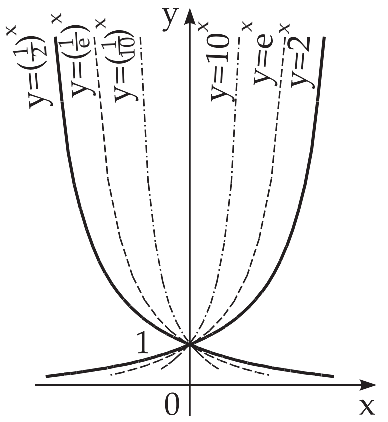
2.6.1. Exponenciális függvények

Az $\quad y = a^x = e^{bx} \quad (1 \neq a > 0\,, \quad b = \ln a)$ (2.48)

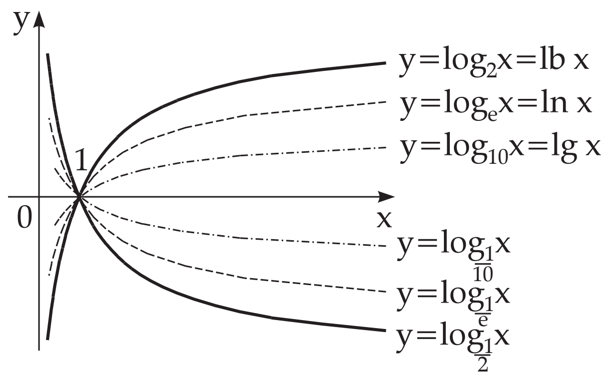
függvény grafikus képe az *exponenciális görbe* **(2.25. ábra)**. Ha $a = e$, kapjuk a

természetes alapú exponenciális görbét: $\qquad y = e^x\,.$ (2.49)

A függvény minden értéke pozitív. Ha $a > 1$ azaz $b > 0$, a függvény monoton növekszik határértékben 0-ról ∞-ig, mindkét határértékéhez annál gyorsabban tartva, minél nagyobb a b szám. Ha $a < 1$ azaz $b < 0$, akkor fordítva: annál gyorsabban csökken monoton módon, határértékben ∞-ről 0-ig, minél nagyobb a $|b|$, azaz minél kisebb az a szám. A görbe átmegy a $(0,1)$ ponton, és aszimptotája az x-tengely negatív fele az $a > 1$, azaz $b > 0$ esetben; az $a < 1$, azaz $b < 0$ esetben a pozitív fele. Az $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ függvény $a < 1$ esetén növekszik és $a > 1$ esetén csökken; az a^x és a^{-x} görbék egymás tükörképei az y-tengelyre vonatkozóan.



2.25. ábra.



2.26. ábra.

2.6.2. Logaritmusfüggvények

Az $$y = \log_a x \quad (a > 0\,, \quad a \neq 1)$$ (2.50)

függvény a *logaritmusgörbét* írja le **(2.26. ábra)**; ez a görbe az a^x exponenciális görbe $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe, azaz a^x-nek $\log_a x$ az inverze. Az $a = e$ esetben az

$$y = \ln x$$ (2.51)

természetes logaritmus görbéjét kapjuk.

A valós számokon belül a logaritmusfüggvény csak $x > 0$ esetén van értelmezve. Ha $a > 1$, akkor monoton növekszik határértékben $-\infty$-ről $+\infty$-ig, ha pedig $a < 1$, akkor monoton csökken határértékben $+\infty$-ről $-\infty$-ig, éspedig az exponenciális függvényekhez hasonlóan mindkét esetben annál gyorsabban, minél kisebb az $|\ln a|$ szám. A görbe átmegy az $(1,0)$ ponton, és $x \to 0+0$ esetén aszimptotikusan közeledik az y-tengelyhez, mégpedig $a > 1$ esetén az alsó, $a < 1$ esetén a felső feléhez, és ezt is hasonló módon annál gyorsabban teszi, minél nagyobb az $|\ln a|$ szám. Most $\log_a x$ és $\log_{\frac{1}{a}} x$ tükörképei egymásnak az x-tengelyre vonatkozóan.

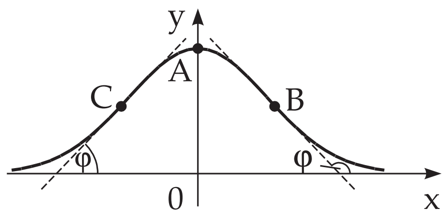
2.6.3. Gauss-féle haranggörbe

Az $$y = e^{-(ax)^2}$$ (2.52)

függvény a folytonos GAUSS-*féle haranggörbét* írja le **(2.27. ábra)**. Ez a görbe szimmetrikus az y-tengelyre, és annál gyorsabban közeledik mindkét irányban aszimptotikusan az x-tengelyhez, minél nagyobb az $|a|$ szám. Az A maximum-pont $(0,1)$, a B, C inflexiós pontok $\left(\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. A megfelelő iránytangensek $\operatorname{tg}\varphi = \mp a\sqrt{2/e}$.

A (2.52) által megadott GAUSS-*féle haranggörbe* fontos alkalmazása a *megfigyelési hibák normális eloszlástörvényének leírása* (lásd Grafikus előállítás és alkalmazás a valószínűségszámításban, 787. és a rákövetkező oldalak), ahol számszorosa a megfelelő sűrűségfüggvény:

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.53}$$



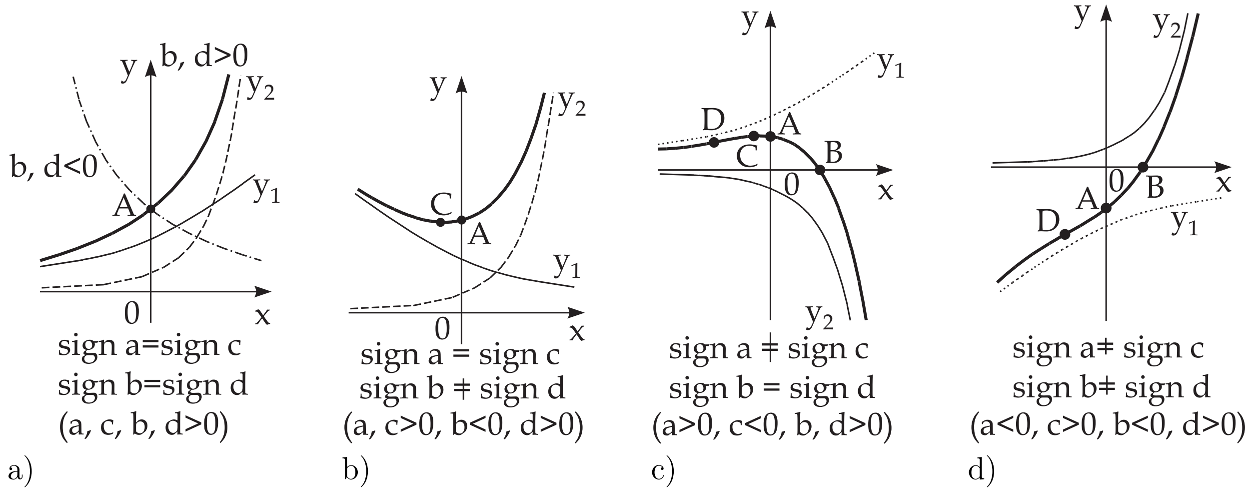
2.27. ábra.

2.6.4. Exponenciális összeg

Az

$$y = ae^{bx} + ce^{dx} \tag{2.54}$$

folytonos függvényt jellegzetes előjelviszonyok mellett a **2.28. ábra** tünteti fel. A szerkesztés úgy tör-



2.28. ábra.

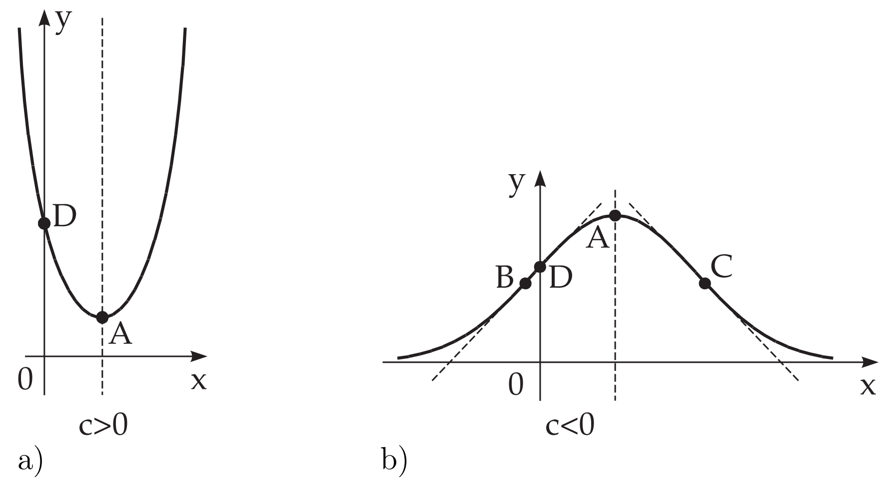
ténik, hogy az $y_1 = ae^{bx}$, $y_2 = ce^{dx}$ összeadandók görbéinek ordinátáit összeadjuk. Ha az a, b, c, d számok egyike sem nulla, a görbe alakját a **2.28. ábrán** szereplő négy görbe valamelyike, vagy valamelyik tengelyre vett tükörképe adja meg. A $b \to -b$, $d \to -d$ helyettesítéssel kapott görbe az eredetinek az y-tengelyre vonatkozó tükörképe, az $a \to -a$, $c \to -c$ esetben pedig az x-tengelyre vonatkozó tükörképet kapjuk. Ezt illusztrálja a **2.28.a ábra** a $b, d > 0$ esetben, a szaggatott–pontozott görbe a tükrözött.

Az y-tengellyel, ill. x-tengellyel való A és B metszéspont $(0, a+c)$, ill. $\left(\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{a}{c}\right), 0\right)$, a C szélsőértékhely x-koordinátája $\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{ab}{cd}\right)$, a D inflexiós ponté pedig $\frac{1}{d-b}\ln\left(-\frac{ab^2}{cd^2}\right)$, feltéve hogy ezek a pontok léteznek, azaz a formulák értelmesek.

a) eset Az a és c, ill. b és d paraméterek előjele azonos: a függvény nem vált előjelet; értéke határértékben 0-ról $+\infty$-ig, ill. $-\infty$-ig, vagy $+\infty$-ről, ill. $-\infty$-ről 0-ra változik. Inflexiós pont nincs; aszimptota az x-tengely (**2.28.a ábra**, a, c, b, $d > 0$ eset).

b) eset Az a és c paraméterek azonos, b és d pedig ellenkező előjelűek: a függvény előjelváltás nélkül határértékben $+\infty$-ről $+\infty$-ig változik és közben egy minimumon megy át, illetve $-\infty$-ről $-\infty$-ig változik és közben egy maximumon halad át. Inflexiós pont nincs (**2.28.b ábra**, $a, c > 0$, $b < 0$, $d > 0$ eset).

c) eset Az a és c paraméterek ellenkező, b és d pedig azonos előjelűek: a függvény határértékben 0-ról $+\infty$-ig, ill. $-\infty$-ig, vagy $+\infty$-ről, ill. $-\infty$-ről 0-ra változik, miközben egyszer előjelet vált, továbbá áthalad egy C szélsőérték-ponton és egy D inflexiós ponton. Aszimptota az x-tengely valamelyik fele (**2.28.c ábra**, $a > 0$, $c < 0$, $b, d > 0$ eset).
d) eset Az a és c paraméterek különböző előjelűek, b és d úgyszintén: a függvény monoton változik határértékben $-\infty$ és $+\infty$, illetve $+\infty$ és $-\infty$ között. Szélsőértéke nincs, viszont van egy D inflexiós pontja (**2.28.d ábra**, $a < 0$, $c > 0$, $b < 0$, $d > 0$ eset).



2.29. ábra.

2.6.5. Általánosított Gauss-féle haranggörbe

Az $\quad y = ae^{bx+cx^2}\,, \quad a \neq 0,\ c \neq 0 \qquad (2.55)$

folytonos függvényt a (2.52) GAUSS-*féle haranggörbe* általánosításának lehet felfogni; a görbe szimmetrikus az $x = -\dfrac{b}{2c}$ függőleges egyenesre, nem metszi az x-tengelyt, az y-tengellyel való D metszéspontja pedig $(0, a)$ **(2.29.a, b ábrák)**.
A függvény menete a és c előjelétől függ. Csak az $a > 0$ esettel foglalkozunk, mert az $a < 0$ esethez tartozó görbét az előbbiből az x-tengelyre való tükrözéssel lehet megkapni.
a) eset, $c > 0$: A függvény határértékben $+\infty$-ről minimumára csökken, majd megint $+\infty$-ig növekszik. Közben mindig pozitív marad. Az A minimumpont $\left(-\dfrac{b}{2c}, ae^{-\frac{b^2}{4c}}\right)$; inflexiós pont és aszimptota nincs **(2.29.a ábra)**.

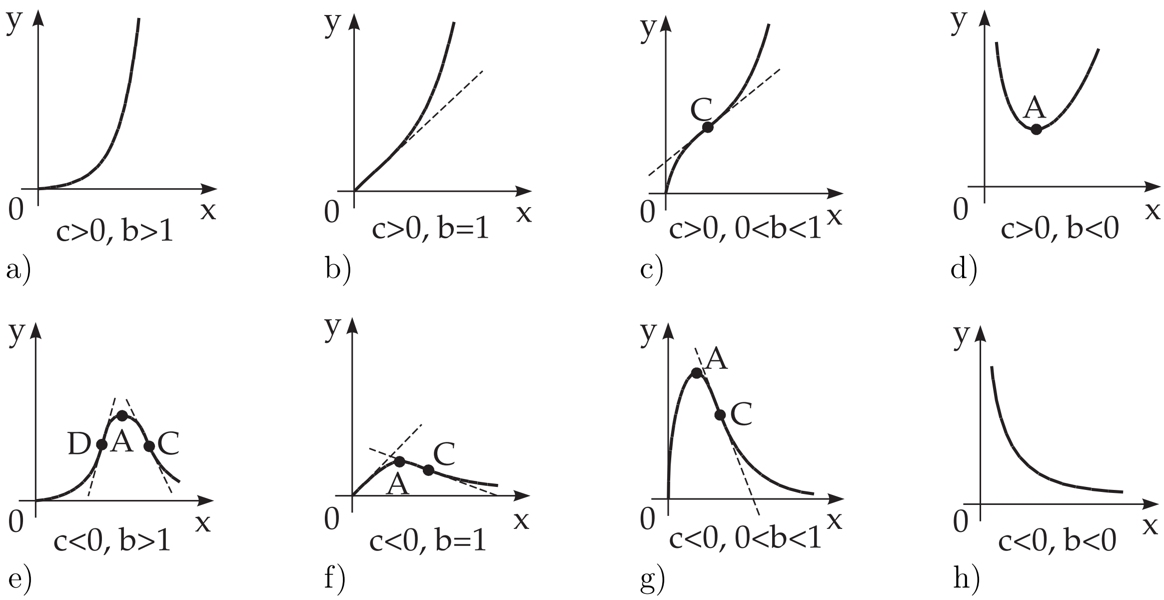
b) eset, $c < 0$: Az x-tengely aszimptota. Az A maximumpont $\left(-\dfrac{b}{2c}\,, ae^{-\frac{b^2}{4c}}\right)$, a B, C inflexiós pontok $\left(\dfrac{-b \pm \sqrt{-2c}}{2c}\,, ae^{\frac{-(b^2+2c)}{4c}}\right)$, a függvény megint mindenhol pozitív **(2.29.b ábra)**.

2.6.6. Hatványfüggvény és exponenciális függvény szorzata

Az $\quad y = ax^be^{cx}\,, \quad a, b, c \neq 0 \qquad (2.56)$

folytonos függvényt csak az $a > 0$ esetben vizsgáljuk, mert az $a < 0$ esetben görbéje az előbbiből az x-tengelyre való tükrözéssel adódik, továbbá az általános hatványfüggvény jelenléte miatt b értékétől

függően csak nemnegatív vagy pozitív x-értékeket tekinthetünk, úgyhogy y minden értéke nemnegatív lesz, és 0 csak a 0-ban lehet (**2.30. ábra**).
A **2.30. ábrán** látható, hogy a paraméterek alkalmas kombinációjával a legkülönfélébb görbemeneteket lehet előállítani.
Ha $b > 0$, akkor a görbe áthalad a koordinátarendszer kezdőpontján. Az érintő ebben a pontban $b > 1$ esetén az x-tengely, $b = 1$ esetén az első síknegyed $y = x$ szögfelezője, $0 < b < 1$ esetén pedig az y-tengely, tehát a jobboldali deriváltja 0-ban rendre 0, a, ∞. Ha $b < 0$, akkor az y-tengely pozitív fele aszimptota. Ha $c > 0$, az x argumentummal együtt a függvény is minden határon túl növekszik; ha $c < 0$, a függvény $+\infty$-ben határértékben 0-ra csökken. Ha b és c előjele különböző, a függvénynek az $x = -\dfrac{b}{c}$ helyen egy A szélsőérték-pontja van. A görbének vagy nincs inflexiós pontja, vagy egy, ill. két C és D inflexiós pontja van $\left(x = -\dfrac{b \pm \sqrt{b}}{c}\right)$, aszerint hogy a képlet értelmes-e, és ekkor hány pozitív értéke van (**2.30.c, e, f, g ábrák**).



2.30. ábra.

2.7. Trigonometrikus függvények

2.7.1. Elemi tudnivalók

2.7.1.1. Definíció és ábrázolás

1. Definíció

A trigonometrikus függvények (más néven *szögfüggvények* vagy *goniometriai függvények*) klasszikus bevezetése geometriai úton történik. Ezért definíciójukat és az argumentum fokban vagy ívmértékben való megadását a 131. oldalon tárgyaljuk.

2. Szinusz

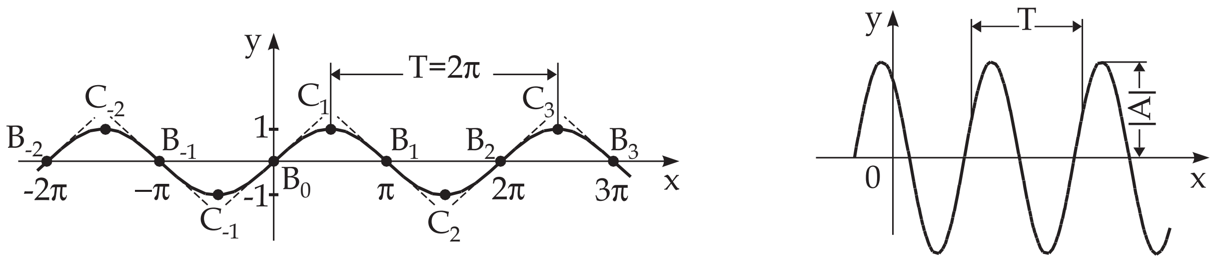
Az

$$y = \sin x \tag{2.57}$$

közönséges szinuszfüggvény görbéjét a **2.31.a ábra** mutatja. Ez egy $T = 2\pi$ periódusú folytonos görbe. A közönséges szinuszgörbe x-tengellyel való $B_0, B_1, B_{-1}, B_2, B_{-2}, \ldots$ metszéspontjai, ahol $B_k = (k\pi, 0)$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a görbének egyúttal inflexiós pontjai is. Ezekben a pontokban a görbe érintőjének az x-tengelyhez viszonyított hajlásszöge $\pm\dfrac{\pi}{4}$. A szélsőértékhelyek C_1, C_{-1}, C_2, $C_{-2}, \ldots$ $C_k = \left[\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi, (-1)^k\right]$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Az
$$y = A\sin(\omega x + \varphi_0) \tag{2.58}$$



a) b)

2.31. ábra.

általános szinuszfüggvény amplitúdója 1 helyett $|A|$, frekvenciája 1 helyett ω, kezdőfázisa, más néven fáziseltolódása pedig 0 helyett φ_0; görbéje a **2.31.b ábrán** látható.

A közönséges szinuszgörbével szemben az általános szinuszgörbe **(2.31.b ábra)** az $|A|$ tényezővel az y-irányban meg van nyújtva, az $\dfrac{1}{\omega}$ tényezővel az x-irányban össze van nyomva, és a $\dfrac{\varphi_0}{\omega}$ szakasszal el van tolva balra. A periódus $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$; az x-tengellyel való metszéspontok $B_k = \left(\dfrac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$;

a szélsőértékhelyek $C_k = \left(\dfrac{\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k A\right)$, a fenti k-értékekkel.

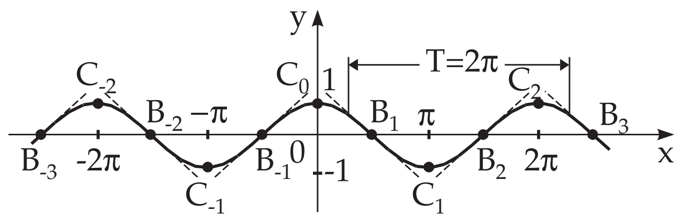
3. Koszinusz

Az
$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.59}$$

közönséges koszinuszfüggvény görbéje az x-tengelyt a B_0, B_1, B_{-1}, B_2, $\ldots$, $B_k = \left[\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi, 0\right]$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ pontokban metszi; ezek egyben az inflexiós pontok is, bennük az érintő irányszöge $\pm\dfrac{\pi}{4}$ **(2.32. ábra)**.

Szélsőértékhelyek: $C_0, C_1, C_{-1}, C_2, \ldots, C_k = (k\pi, (-1)^k)$.

Az
$$y = A\cos(\omega x + \varphi_0) \tag{2.60}$$
általános koszinuszfüggvény az
$$y = A\sin\left(\omega x + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.61}$$
alakban is felírható, vagyis mint általános szinuszfüggvény $\varphi = 90°$ fáziseltolódással.

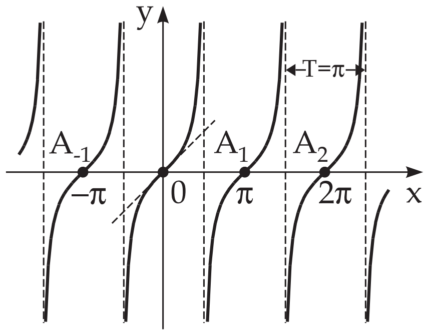


2.32. ábra.

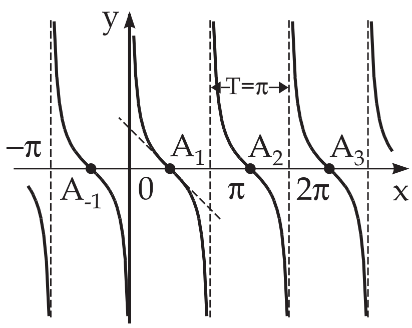
4. Tangens

Az
$$y = \operatorname{tg} x \tag{2.62}$$

tangensfüggvény periódusa $T = \pi$, aszimptotái az $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ egyenesek **(2.33. ábra)**. Ha x a $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ között változik, a függvény monoton növekszik határértékben $-\infty$-ről $+\infty$-ig. Az x-tengellyel való 0, A_1, A_{-1}, A_2, $A_{-2}, \ldots$, $A_k = (k\pi, 0)$ metszéspontok egyúttal inflexiós pontok is, amelyekben az érintő irányszöge $\frac{\pi}{4}$.



2.33. ábra.



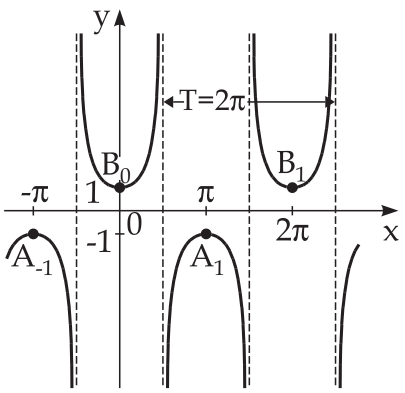
2.34. ábra.

5. Kotangens

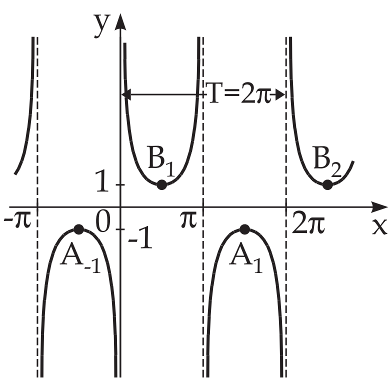
Az
$$y = \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.63}$$
kotangensfüggvény az x-tengelyre tükrözött és $\frac{\pi}{2}$ szakasszal balra eltolt tangensgörbe **(2.34. ábra)**, tehát ez is π szerint periodikus. Az aszimptoták az $x = k\pi$ egyenesek. Ha x 0 és π között változik, y monoton csökken határértékben $+\infty$-ről $-\infty$-ig. Az x-tengellyel való A_1, A_{-1}, A_2, $A_{-2}, \ldots$ metszéspontok, ahol $A_k = \left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, 0\right)$, egyúttal inflexiós pontok is, amelyekben az érintő irányszöge $\frac{\pi}{4}$.

6. Szekáns

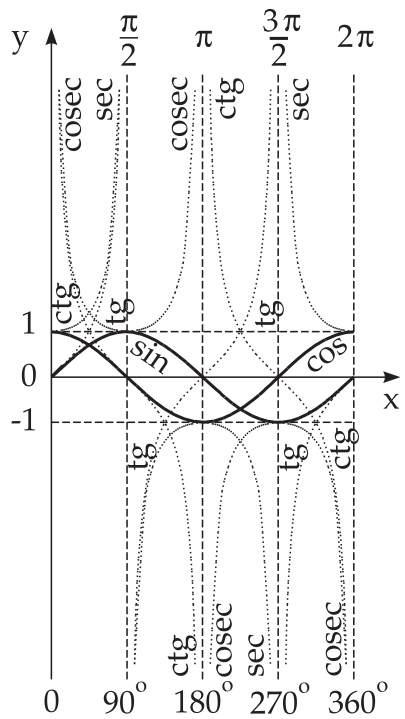
Az
$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \tag{2.64}$$
szekánsfüggvény periódusa $T = 2\pi$, az aszimptoták $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$; mindig fennáll $|y| \geq 1$. A lokális maximumpontok A_1, A_{-1}, A_2, $A_{-2}, \ldots$, ahol $A_k = [(2k+1)\pi, -1]$; a lokális minimumpontok B_0, B_1, B_{-1}, $B_2, B_{-2}, \ldots$, ahol $B_k = (2k\pi, +1)$ **(2.35. ábra)**.



2.35. ábra.



2.36. ábra.



2.37. ábra.

7. Koszekáns

Az
$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \tag{2.65}$$
koszekánsfüggvény görbéje egy $x = \dfrac{\pi}{2}$ szakasszal jobbra eltolt szekánsgörbe. Az aszimptoták $x = k\pi$. A lokális maximumpontok $A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \ldots$, ahol $A_k = \left(\dfrac{4k+3}{2}\pi, -1\right)$; a lokális minimumpontok $B_0, B_1, B_{-1}B_2, B_{-2}, \ldots$, ahol $B_k = \left(\dfrac{4k+1}{2}\pi, +1\right)$ **(2.36. ábra)**.

Megjegyzés: Komplex argumentumú trigonometrikus függvények a 726. oldalon kerülnek tárgyalásra.

2.7.1.2. Értékkészletek és a függvények menete

1. $0 \leq x \leq 360°$ szögtartomány

A **2.37. ábrán** együtt látható mind a hat trigonometrikus függvény görbéje mind a négy síknegyedhez tartozó, vagyis 0° és 360° közötti, azaz ívmértékben 0 és 2π közötti szögekre.
A **2.1. táblázat** áttekintést ad az első 4 függvény értelmezési tartományáról és értékkészletéről. A 6 függvény előjelét, amely a megfelelő (szögben kifejezett) argumentumot tartalmazó síknegyedtől függ, a **2.2. táblázat** mutatja.

2.1. táblázat. A trigonometrikus függvények értelmezési tartománya (ívmértékben) és értékkészlete

Értelmezési tartomány	Értékkészlet	Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$-\infty < x < \infty$	$-1 \leq \sin x \leq 1$ $-1 \leq \cos x \leq 1$	$x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$	$-\infty < \operatorname{tg} x < \infty$ $-\infty < \operatorname{ctg} x < \infty$

2.2. táblázat. A trigonometrikus függvények előjele

Síknegyed	Szög nagysága (a határokat nem beleértve)	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
I	0°-tól 90°-ig	+	+	+	+	+	+
II	90°-tól 180°-ig	+	−	−	−	−	+
III	180°-tól 270°-ig	−	−	+	+	−	−
IV	270°-tól 360°-ig	−	+	−	−	+	−

2. Egyes speciális argumentumokhoz tartozó függvényértékek

2.3. táblázat.
A trigonometrikus függvények $0°, 30°, 45°, 60°$ és $90°$-hoz, illetve a megfelelő ívmértékhez tartozó értékei ($\pm\infty$ és $\mp\infty$ féloldali határértéket jelent)

Szög	Ívmérték	sin	cos	tg	ctg	sec	cosec
$0°$	0	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$
$30°$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$45°$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1

3. Tetszőleges szögek

Mivel a trigonometrikus függvények periodikusak (2π, ill. π periódussal), a tetszőleges x argumentumhoz tartozó függvényérték meghatározását megkönnyítik a következő szabályok (az ívmértékre való átírás — is — triviális).

Az x argumentum $> 360°$: Ha a szög nagyobb, mint $360°$ (ill. nagyobb, mint $180°$), akkor a trigonometrikus függvények értékét a következő szabályok segítségével vissza lehet vezetni olyan α szöghöz tartozó függvényértékekre, amelyekre $0 \leq \alpha \leq 360°$ (ill. $\leq 180°$) (n egész):

$$\sin(360° \cdot n + \alpha) = \sin\alpha\,, \qquad (2.66) \qquad\qquad \cos(360° \cdot n + \alpha) = \cos\alpha\,, \qquad (2.67)$$

$$\operatorname{tg}(180° \cdot n + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha\,, \qquad (2.68) \qquad\qquad \operatorname{ctg}(180° \cdot n + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha\,. \qquad (2.69)$$

Az x argumentum < 0: Ha az argumentum negatív ($x = -\alpha$), akkor a függvényértékeket a következő képletekkel lehet pozitív argumentumhoz tartozó függvényértékekre visszavezetni:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,, \qquad (2.70) \qquad\qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\,, \qquad (2.71)$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha\,, \qquad (2.72) \qquad\qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha\,. \qquad (2.73)$$

Az x argumentumra $90° < x < 360°$: Ha $90° < x < 360°$, akkor a függvényértéket a **2.4. táblázatban** szereplő *redukciós képletek*kel egy α hegyesszöghöz tartozó függvényértékre lehet visszavezetni. Az olyan függvényértékek között fennálló összefüggéseket, amelyek egymástól $90°$-kal, $180°$-kal vagy $270°$-kal eltérő, illetve egymást $90°$-ra, $180°$-ra vagy $270°$-ra kiegészítő szögekhez tartoznak, *kvadránsrelációk*nak nevezzük. (Itt is triviális az ívmértékre való átírás.)

2.4. táblázat. Trigonometrikus függvények redukciós képletei (kvadránsrelációk)

Függvény	$x = 90° \pm \alpha$	$x = 180° \pm \alpha$	$x = 270° \pm \alpha$	$x = 360° - \alpha$
$\sin x$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

A **2.4. táblázat** 1. és 2. oszlopa *pótszögtételek*et, 1. és 3. oszlopa *kiegészítőszög-tételek*et tartalmaz. Ismert, hogy $90° - \alpha$ az α szög *pótszöge* (lásd 131. old.), ezért hívjuk a

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)\,, \qquad (2.74a) \qquad\qquad \mp\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) \qquad (2.74b)$$

és a táblázatban szereplő többi összefüggést *pótszögtételek*nek.

A trigonometrikus függvények kiegészítő szögekhez (lásd 131. old.) tartozó értékei közötti,

$$\mp\sin\alpha = \sin(180° - \alpha), \qquad (2.75a) \qquad\qquad -\cos\alpha = \cos(180° - \alpha) \qquad (2.75b)$$

és a többi feltüntetett összefüggést pedig hasonlóan *kiegészítőszög-tételek*nek nevezzük. A „+” előjelek csak a könnyebb megjegyezhetőség miatt szerepelnek.

Az x argumentumra $0° < x < 90°$: Ha hegyesszögről van szó ($0° < x < 90°$), a függvényértékeket korábban csak táblázatból állapították meg, most zsebszámológépről is leolvashatók.

■ $\sin(-1000°) = -\sin 1000° = -\sin(360° \cdot 2 + 280°) = -\sin 280° = +\cos 10° = +0{,}9848$.

4. Ívmértékben megadott szögek

Az ívmértékben, azaz radián egységekben megadott argumentumértékeket a (3.2) képlet segítségével lehet fokra átszámítani (lásd 132. old.).

2.7.2. Trigonometrikus függvényekre vonatkozó további fontos formulák

2.7.2.1. Trigonometrikus függvények közötti összefüggések

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad (2.76)$$
$$\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = 1, \qquad (2.77)$$
$$\operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 1, \qquad (2.78)$$
$$\sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1, \qquad (2.79)$$
$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1, \qquad (2.80)$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad (2.81)$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad (2.82) \qquad\qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (2.83)$$

Az áttekinthetőség érdekében a további formulákat a **2.5. táblázatban** foglaltuk össze. E formulákban általános esetben a gyökjel elé aszerint kell pozitív vagy negatív előjelet tenni, hogy a szög melyik síknegyedben (ívmérték-intervallumban) helyezkedik el:

2.7.2.2. Trigonometrikus függvények szögek összegéhez, ill. különbségéhez tartozó értékei

(Itt és a továbbiakban csak annyi a megkötés a szereplő szögekre, hogy a formulák értelmesek legyenek.)

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta, \ (2.84) \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta, \ (2.85)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (2.86) \qquad\qquad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (2.87)$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma) = {} & \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ & + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\end{aligned} \qquad (2.88)$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma) = {} & \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ & - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.\end{aligned} \qquad (2.89)$$

2.5. táblázat.
Trigonometrikus függvények kifejezése egymással ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

Szögfüggvény	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	–	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	–	$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	–	$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	–

2.7.2.3. Trigonometrikus függvények szögek többszöröseihez tartozó értékei

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,, \tag{2.90}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,, \tag{2.91}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,, \tag{2.92}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,, \tag{2.93}$$

$$\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha\,, \tag{2.94}$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1\,, \tag{2.95}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{2.96}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\,, \tag{2.97}$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha\,,} \tag{2.98}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\,, \tag{2.99}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}\,, \tag{2.100}$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 6\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha - 4\operatorname{ctg}\alpha}\,. \tag{2.101}$$

Nagy n értékekre $\sin n\alpha$ és $\cos n\alpha$ meghatározására a MOIVRE-féle képletet célszerű alkalmazni. A binomiális tétel és az $\binom{n}{m}$ binomiális együttható (lásd 12. old.) használatával és $i^2 = -1$ figyelembevételével kapjuk:

$$\cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + \mathrm{i}n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha$$
$$-\mathrm{i}\binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + \ldots, \tag{2.102}$$

innen pedig a valós és képzetes részek egyenlősége miatt

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \binom{n}{6}\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \ldots, \tag{2.103}$$

$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots\ . \tag{2.104}$$

2.7.2.4. Trigonometrikus függvények szög feléhez tartozó értékei (félszögtételek)

A következő képletekben a gyökjel elé aszerint kell pozitív vagy negatív előjelet tenni, hogy a szög melyik félsíkban, illetve síknegyedben (ívmérték-intervallumban) helyezkedik el.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}, \tag{2.105}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}, \tag{2.106}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \tag{2.107}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \tag{2.108}$$

2.7.2.5. Trigonometrikus függvények két értékének összege, ill. különbsége (addíciós tételek)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{2.109}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{2.110}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{2.111}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{2.112}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{2.113}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \tag{2.114}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \tag{2.115}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}. \tag{2.116}$$

2.7.2.6. Trigonometrikus függvények értékeinek szorzata

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right], \tag{2.117}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right], \tag{2.118}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right], \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = {} & \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\beta+\gamma-\alpha) \\ & + \sin(\gamma+\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)],\end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = {} & \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\beta+\gamma-\alpha) \\ & + \sin(\gamma+\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta+\gamma)],\end{aligned} \tag{2.121}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = {} & \frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) \\ & + \cos(\gamma+\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+\gamma)],\end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)]\,. \tag{2.123}$$

2.7.2.7. Trigonometrikus függvények hatványai

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\,, \tag{2.124}$$ $$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\,, \tag{2.125}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha)\,, \tag{2.126}$$ $$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)\,, \tag{2.127}$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3)\,, \tag{2.128}$$ $$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3)\,. \tag{2.129}$$

Nagy n értékekre $\sin^n\alpha$ és $\cos^n\alpha$ értékét hatányozás nélkül rekurzióval határozzuk meg, $\cos\alpha, \cos 2\alpha, \ldots, \cos n\alpha$ és $\sin\alpha, \sin 2\alpha, \ldots, \sin n\alpha$ 81. oldalon található képleteit átrendezve.

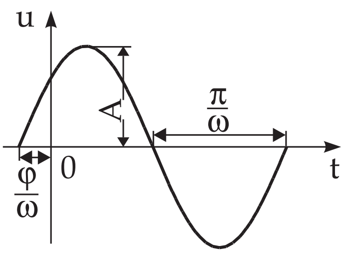
2.7.3. Rezgések leírása

2.7.3.1. A probléma megfogalmazása

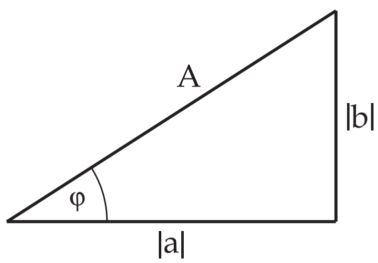
A technikában és a fizikában gyakran fordulnak elő a t-vel jelölt időtől függő,

$$u = A\sin(\omega t+\varphi)\,, \quad A>0 \tag{2.130}$$

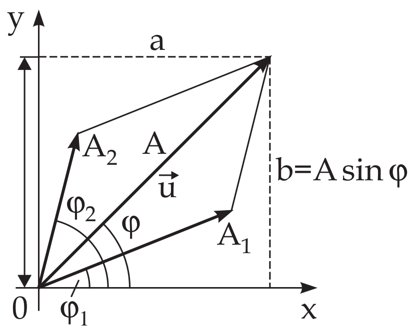
alakú mennyiségek. Ezeket néha *szinuszos mennyiségek*nek is hívják. Időbeli változásuk *harmonikus rezgést* ír le. (2.130) ábrázolása általános szinuszgörbét eredményez; lásd a **2.38. ábrát**.



2.38. ábra.



2.39. ábra.



2.40. ábra.

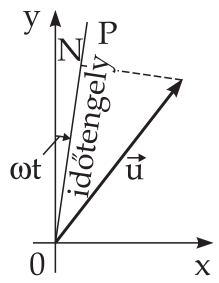
Az általános szinuszgörbe az $y = \sin x$ közönséges szinuszgörbéjétől a következőkben különbözhet:
a) az A *amplitúdó*ban, vagyis a t időtengelytől való legnagyobb kitérésben,
b) a $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ periódusban, amelyet itt *hullámhossz*nak hívunk (itt ω a *rezgési frekvencia*, amelyet a rezgéstanban *körfrekvenciá*nak hívnak),
c) a φ *kezdeti szög*ben vagy *kezdőfázis*ban vagy *fáziseltolódás*ban, amelyről feltehető , hogy $[0, 2\pi)$-be esik.

Az $u = u(t)$ mennyiség

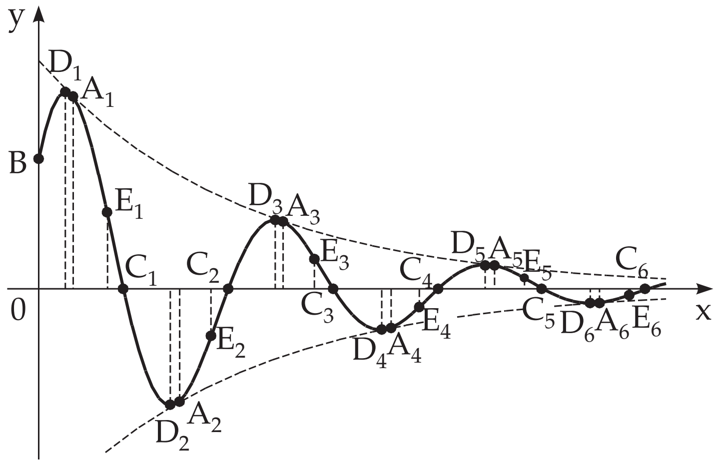
$$a\sin\omega t + b\cos\omega t \tag{2.131}$$

alakban is előállítható. Itt $t=0$ és $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ adja, hogy $A = \sqrt{a^2+b^2}$ és $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$, amiből a és

b egyértelműen meghatározható. Az a, b, A és φ mennyiségek a **2.39. ábra** szerint egy derékszögű háromszög meghatározó adatainak tekinthetők. (Ha φ $180° + \alpha$ alakú, akkor helyette $180° - \alpha$, és ha [ez] $90° + \beta$ alakú, akkor ehelyett $90° - \beta$ veendő, hogy végül hegyesszöget kapjunk, melynek tangense $\frac{|b|}{|a|}$.)



2.41. ábra.



2.42. ábra.

2.7.3.2. Rezgések szuperpozíciója vagy összetétele

Rezgések *szuperpozíciójának* (összetételének) nevezzük legegyszerűbb esetben *két, azonos frekvenciájú rezgés összeadását.* Ez ismét harmonikus rezgést ad, mégpedig ugyanazzal a frekvenciával:

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{2.132a}$$

ahol a korábbi helyettesítésekkel

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \text{(2.132b)} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \tag{2.132c}$$

(Ha az $A\cos\varphi$-vel egyenlő nevező 0, akkor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{3\pi}{2}$, aszerint, hogy az $A\sin\varphi$-vel egyenlő számláló pozitív vagy negatív; mivel a gyök alatti kifejezés ≥ 0, ebben és az általános esetben is $A \geq 0$ és φ egyértelműen meghatározott). Ezt egyre több összeadandóra alkalmazva kettőnél több, azonos frekvenciájú általános szinuszfüggvény *lineáris kombinációja* is általános szinuszfüggvényt (harmonikus rezgést) eredményez, ugyanazzal a frekvenciával:

$$\sum_i c_i A_i \sin(\omega t + \varphi_i) = A \sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{2.133}$$

ahol a (2.132b)-beli A és a (2.132c)-beli φ mennyiséget egy vektordiagramból **(2.40. ábra)** lehet meghatározni.

2.7.3.3. Rezgések vektordiagramja

A (2.130) és a vele egyenlő, (2.131) alakú általános szinuszfüggvény célszerűen reprezentálható egy közös síkban a $\rho = A, \varphi$ polárkoordinátákkal és az $x = a$, $y = b$ Descartes-féle koordinátákkal (lásd 191. old.), mert a korábbiak miatt az $\vec{u} \equiv (a, b)$ pont polárkoordinátái (A, φ). Két ilyen mennyiség összege ekkor a két, (a_1, b_1) és (a_2, b_2) vektor összegeként adódik **(2.40. ábra)**. Ugyanígy több ilyen vektor összege több általános szinuszfüggvény *lineáris kombinációját* adja. Ezt az ábrázolást *vektordiagram*nak nevezzük.

A megadott t időponthoz tartozó u mennyiséget a vektordiagram $\vec{u}$ vektorából a **2.41. ábra** szerint lehet meghatározni: Először a koordinátarendszer O kezdőpontján átfektetjük az $OP(t)$ időtengelyt, amely O körül az óramutató járásával egyező irányban, állandó ω szögsebességgel forog. A $t = 0$ kezdeti időpontban az y-tengely és ezen t-tengely egybeesik. Ezután bármely t időpontban $\vec{u}$-nak az időtengelyre ejtett ON vetületi hossza egyenlő az $u(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ általános szinuszfüggvény abszolút értékével. A $t = 0$ időpontban $u(0) = A\sin\varphi$ $\vec{u}$-nak az y-tengelyre való vetülete **(2.41. ábra)**.

2.7.3.4. Rezgések csillapítása

Az
$$y = Ae^{-ax}\sin(\omega x + \varphi_0) \tag{2.134}$$
függvény $x > 0$ esetén *egy csillapított rezgés görbéjét* **(2.42. ábra)** írja le. A rezgés az x-tengely körül megy végbe, és közben a görbe aszimptotikusan közeledik az x-tengelyhez. A szinuszgörbe burkolói az $y = \pm Ae^{-ax}$ exponenciális görbék; az érintési pontok

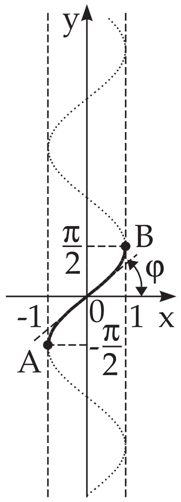
$$A_1,\, A_2, \ldots, A_k = \left(\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0}{\omega},\; (-1)^k A\,\exp\left(-a\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \varphi_0}{\omega} \right) \right).$$

A koordinátatengelyekkel való metszéspontok $B = (0, A\sin\varphi_0), C_1, C_2, \ldots, C_k = \left(\dfrac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$. A D_1, $D_2, \ldots, D_k, \ldots$ szélsőértékhelyek az $x = \dfrac{k\pi - \varphi_0 + \alpha}{\omega}$ argumentumokhoz, az E_1, $E_2, \ldots, E_k, \ldots$ inflexiós pontok az $x = \dfrac{k\pi - \varphi_0 + 2\alpha}{\omega}$ argumentumokhoz tartoznak, ahol $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\omega}{a}$.

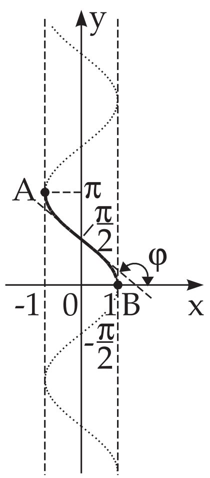
A $\delta = \ln\left|\dfrac{y_i}{y_{i+1}}\right| = a\dfrac{\pi}{\omega}$ mennyiséget a csillapítás *logaritmikus dekrementum*ának nevezzük; itt y_i és y_{i+1} bármely két szomszédos argumentumú szélsőérték.

2.8. Ciklometrikus függvények (árkuszfüggvények)

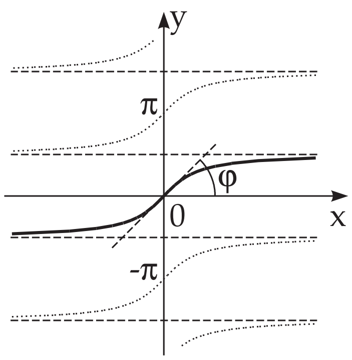
A ciklometrikus függvények a trigonometrikus függvények inverz függvényei. *Inverz trigonometrikus* vagy *árkuszfüggvények*nek is hívjuk őket. Egyértelmű definiálásuk céljából a trigonometrikus függvények értelmezési tartományát monotonitási intervallumokra bontjuk fel, így minden monotonitási intervallumra adódik egy inverz függvény. Ezeket a hozzájuk tartozó monotonitási intervallumnak megfelelő k indexszel látjuk el.



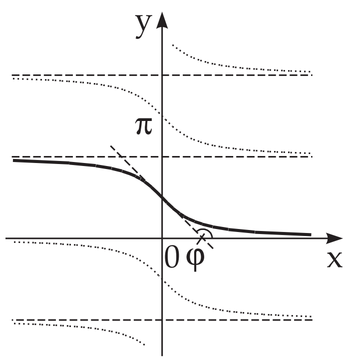
2.43. ábra.



2.44. ábra.



2.45. ábra.



2.46. ábra.

2.8.1. A ciklometrikus függvények definíciója

Az eljárást az árkusz szinusz függvény példáján mutatjuk be **(2.43. ábra)**. Az $y = \sin x$ függvény értelmezési tartományát a $k\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le k\pi + \frac{\pi}{2}$ monotonitási intervallumokra bontjuk fel, ahol $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Az $y = \sin x$ függvény görbéjét az $y = x$ szögfelező egyenesre tükrözve kapjuk az

$$y = \mathrm{arc}_k \sin x \tag{2.135a}$$

inverz függvényeket, amelyeknek az értelmezési tartománya és értékkészlete

$$-1 \le x \le +1\,, \quad \text{ill.} \quad k\pi - \frac{\pi}{2} \le y \le k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{ahol} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{2.135b}$$

Az $y = \mathrm{arc}_k \sin x$ és az $x = \sin y$ írásmód ekvivalens. Analóg módon nyerhetők a többi árkuszfüggvények, amelyeket a **2.44.–2.46. ábrák** szemléltetnek (arccos, arctg, arcctg). Az árkuszfüggvények értelmezési tartománya és értékkészlete, valamint a velük ekvivalens trigonometrikus függvények — azaz amelyből származnak — a **2.6. táblázatban** vannak feltüntetve.

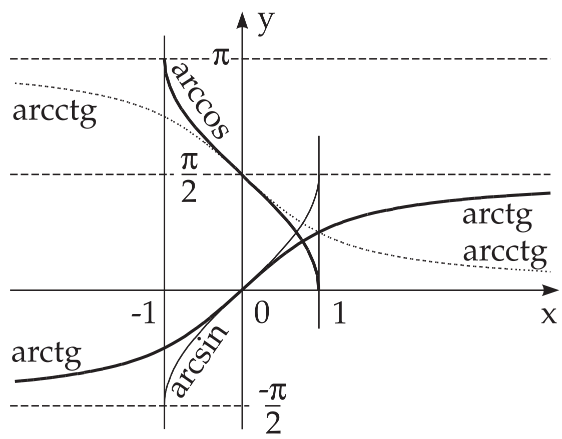
2.8.2. Visszavezetés a főértékekre

Az árkuszfüggvények közül a $k = 0$ indexnek megfelelő az úgynevezett *főérték*, amelyet a k index elhagyásával írunk, pl. $\arcsin x \equiv \mathrm{arc}_0 \sin x$.
A **2.47. ábrán** az árkuszfüggvények főértékei láthatók.

Megjegyzés: A főértékeket zsebszámológépről is le lehet olvasni. A főértékre való visszavezetés a következő képletekkel történik:

$$\mathrm{arc}_k \sin x = k\pi + (-1)^k \arcsin x, \tag{2.136}$$

$$\mathrm{arc}_k \cos x = \begin{cases} (k+1)\pi - \arccos x & (k \text{ páratlan}) \\ k\pi + \arccos x & (k \text{ páros})\,, \end{cases} \tag{2.137}$$



2.47. ábra.

$$\mathrm{arc}_k \operatorname{tg} x = k\pi + \operatorname{arctg} x\,, \tag{2.138}$$

$$\mathrm{arc}_k \operatorname{ctg} x = k\pi + \operatorname{arcctg} x\,. \tag{2.139}$$

■ **A:** $\arcsin 0 = 0\,,\ \mathrm{arc}_k \sin 0 = k\pi\,.$

■ **B:** $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}\,,\ \mathrm{arc}_k \operatorname{ctg} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi\,.$

■ **C:** $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},\ \mathrm{arc}_k \cos \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3} + (k+1)\pi$ ha k páratlan és $= \frac{\pi}{3} + k\pi$ ha k páros.

2.8.3. Összefüggések a főértékek között

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\arccos \sqrt{1-x^2} & (-1 \le x \le 0), \\ \arccos \sqrt{1-x^2} & (0 \le x \le 1)\,, \end{cases} \tag{2.140}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2} & (-1 \le x \le 0)\,, \\ \arcsin \sqrt{1-x^2} & (0 \le x \le 1)\,, \end{cases} \tag{2.141}$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,, \tag{2.142}$$

2.6. táblázat. A ciklometrikus függvények értelmezési tartománya és értékkészlete

Árkuszfüggvény	Értelmezési tartomány	Értékkészlet	Eredeti trigonometrikus függvény
Árkusz szinusz $y = \mathrm{arc}_k \sin x$	$-1 \le x \le 1$	$k\pi - \frac{\pi}{2} \le y \le k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = \sin y$
Árkusz koszinusz $y = \mathrm{arc}_k \cos x$	$-1 \le x \le 1$	$k\pi \le y \le (k+1)\pi$	$x = \cos y$
Árkusz tangens $y = \mathrm{arc}_k \operatorname{tg} x$	$-\infty < x < \infty$	$k\pi - \frac{\pi}{2} < y < k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = \operatorname{tg} y$
Árkusz kotangens $y = \mathrm{arc}_k \operatorname{ctg} x$	$-\infty < x < \infty$	$k\pi < y < (k+1)\pi$	$x = \operatorname{ctg} y$
$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. A $k = 0$ esetben kapjuk az illető ciklometrikus függvény főértékét, amelyet index nélkül írunk (pl. $\arcsin x \equiv \mathrm{arc}_0 \sin x$).			

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x} - \pi & (x < 0) \\ \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} -\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \le 0)\,, \\ \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \ge 0)\,, \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \tag{2.143}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,, \tag{2.144}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} + \pi & (x < 0) \\ \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & (x > 0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} \pi - \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \le 0) \\ \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \ge 0)\,. \end{cases} \tag{2.145}$$

2.8.4. Képletek ellentett argumentumpárokra

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x\,, \tag{2.146}$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x\,, \tag{2.147}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x\,, \tag{2.148}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x\,. \tag{2.149}$$

2.8.5. $\arcsin x$ és $\arcsin y$ összege és különbsége

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (xy \le 0 \text{ vagy } x^2 + y^2 \le 1)\,, \tag{2.150a}$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (x > 0, y > 0,\ x^2 + y^2 \ge 1)\,, \tag{2.150b}$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (x < 0, y < 0,\ x^2 + y^2 \ge 1)\,. \tag{2.150c}$$

$$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (xy \ge 0 \text{ vagy } x^2 + y^2 \le 1)\,, \tag{2.151a}$$

$$= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (x > 0,\ y < 0,\ x^2+y^2 \ge 1)\,, \tag{2.151b}$$

$$= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad (x < 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 \ge 1)\,. \tag{2.151c}$$

2.8.6. $\arccos x$ és $\arccos y$ összege és különbsége

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x+y \ge 0)\,, \tag{2.152a}$$

$$= 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x+y \le 0)\,. \tag{2.152b}$$

$$\arccos x - \arccos y = -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x \ge y)\,, \tag{2.153a}$$

$$= \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad (x \le y)\,. \tag{2.153b}$$

2.8.7. $\operatorname{arctg} x$ és $\operatorname{arctg} y$ összege és különbsége

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \quad (xy < 1)\,, \tag{2.154a}$$

$$= \pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \quad (x > 0 \text{ és } xy > 1\,, \quad \text{azaz} \quad y > 0 \text{ és } xy > 1) \tag{2.154b}$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \quad (x < 0,\ y < 0,\ xy > 1)\,, \tag{2.154c}$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad (xy = 1)\,. \tag{2.154d}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \quad (xy > -1)\,, \tag{2.155a}$$

$$= \pi + \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \quad (x > 0,\ y < 0,\ xy < -1)\,, \tag{2.155b}$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \quad (x < 0,\ y > 0,\ xy < -1)\,, \tag{2.155c}$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad (xy = -1)\,. \tag{2.155d}$$

2.8.8. Speciális összefüggések az $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ függvényekre

$$2\arcsin x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left(|x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,, \tag{2.156a}$$

$$= \pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} < x \le 1\right)\,, \tag{2.156b}$$

$$= -\pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \quad \left(-1 \le x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,. \tag{2.156c}$$

$$2\arccos x = \arccos(2x^2-1) \quad (0 \le x \le 1)\,, \tag{2.157a}$$

$$= 2\pi - \arccos(2x^2-1) \quad (-1 \le x \le 0)\,. \tag{2.157b}$$

$$2\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} \quad (|x| < 1)\,, \tag{2.158a}$$

$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \quad (x > 1)\,, \tag{2.158b}$$

$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \quad (x < -1)\,. \tag{2.158c}$$

$$\cos(n \arccos x) = T_n(x) \quad (n \geq 1)\,, \tag{2.159}$$

ahol n törtszám is lehet, és $T_n(x)$-et a

$$T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n}{2} \tag{2.160}$$

képlet határozza meg. Ha n egész szám, akkor $T_n(x)$ az x változónak valójában polinomja (CSEBISEV-*polinom*). A CSEBISEV-polinomok tulajdonságairól lásd: 946. old.

2.9. Hiperbolikus függvények

2.9.1. A hiperbolikus függvények definíciója

A *szinusz hiperbolikusz, koszinusz hiperbolikusz* és *tangens hiperbolikusz* definíciója a következő:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (\textit{szinusz hiperbolikusz})\,, \tag{2.161}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (\textit{koszinusz hiperbolikusz})\,, \tag{2.162}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (\textit{tangens hiperbolikusz})\,. \tag{2.163}$$

A geometriai definíció, amely a Geometria fejezetben található meg (lásd 133. old.), analóg a trigonometrikus függvényekével.
A *kotangens hiperbolikusz, szekáns hiperbolikusz* és *koszekáns hiperbolikusz* az előző három hiperbolikus függvény reciprok értékeként van értelmezve:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad (\textit{kotangens hiperbolikusz})\,, \tag{2.164}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad (\textit{szekáns hiperbolikusz})\,, \tag{2.165}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \qquad (\textit{koszekáns hiperbolikusz})\,, \tag{2.166}$$

A hiperbolikus függvények menetét a **2.48.–2.52. ábrák** mutatják.

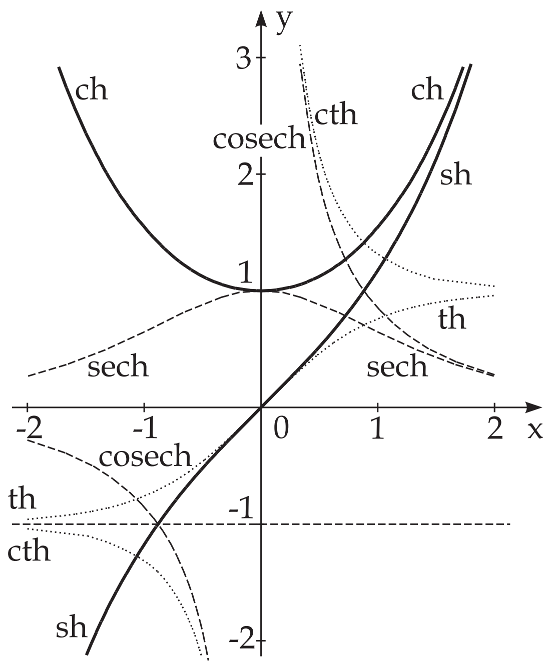
2.9.2. A hiperbolikus függvények grafikus előállítása

2.9.2.1. Szinusz hiperbolikusz

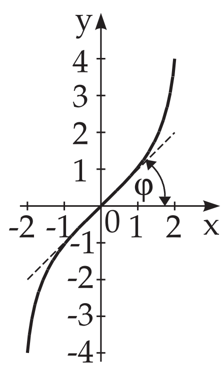
$y = \operatorname{sh} x$ (lásd 2.161) páratlan, $-\infty$ és $+\infty$ között monoton növekedő függvény **(2.49. ábra)**. A koordinátarendszer kezdőpontja egyszerre szimmetria-középpontja és inflexiós pontja is a görbének, a hozzá tartozó érintő irányszöge $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Aszimptota nincs.

2.9.2.2. Koszinusz hiperbolikusz

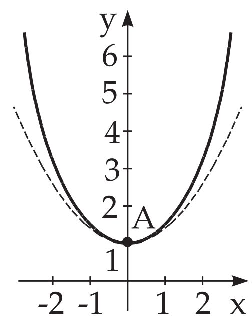
$y = \operatorname{ch} x$ (lásd 2.162) páros függvény, amely $-\infty < x \leq 0$-ban monoton csökken $+\infty$-ről 1-re, $0 \leq x < +\infty$-ben pedig monoton növekszik 1-ről $+\infty$-re **(2.50. ábra)**. A minimumpont $A(0,1)$; aszimptota nincs. A görbe szimmetrikus az y-tengelyre, és az $y = 1 + \dfrac{x^2}{2}$ parabola (az ábrán a szaggatott görbe)



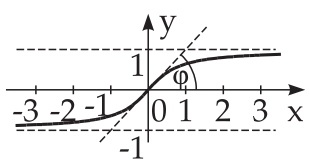
2.48. ábra.



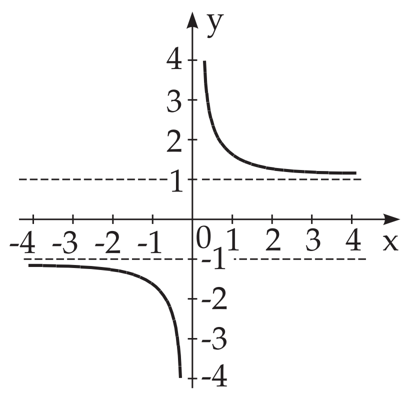
2.49. ábra.



2.50. ábra.



2.51. ábra.



2.52. ábra.

fölött marad (a másodrendű felfele nyitott parabolák közül ez érinti a görbét a 0-ban a 2. deriváltig bezárólag). A függvény *láncgörbét* ír le (lásd 109. old.).

2.9.2.3. Tangens hiperbolikusz

$y = \operatorname{th} x$ (lásd 2.163) páratlan függvény, amely x-nek $-\infty$-től $+\infty$ felé való haladásakor monoton növekszik (határértékben) -1-ről $+1$-ig **(2.51. ábra)**. A koordinátarendszer kezdőpontja a görbének egyszerre szimmetria-középpontja és inflexiós pontja is, a hozzá tartozó érintő irányszöge $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Az $y = \pm 1$ egyenesek aszimptoták.

2.9.2.4. Kotangens hiperbolikusz

$y = \operatorname{cth} x$ (lásd 2.164) páratlan függvény, amelynek az $x = 0$ pont szakadási helye **(2.52. ábra)**. A $-\infty < x < 0$-ban monoton csökken -1-ről $-\infty$-ig, a $0 < x < +\infty$-ben pedig (határértékben) $+\infty$-ről $+1$-ig. Szélsőérték és inflexiós pont nincs. Az $x = 0$ és az $y = \pm 1$ egyenesek aszimptoták.

2.9.3. Hiperbolikus függvényekre vonatkozó fontos képletek

A hiperbolikus függvényeket egymással összekapcsoló definíciók és képletek analógiát mutatnak a trigonometrikus függvényeknél megismertekkel. Így nem meglepő, hogy a megfelelő trigonometrikus képletekből lehet ez utóbbiakat levezetni a (2.194)–(2.201) összefüggések segítségével.

2.9.3.1. Egyező argumentumú hiperbolikus függvények

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1\,, \tag{2.167}$$

$$\operatorname{sech}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1\,, \tag{2.168}$$

$$\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1\,, \tag{2.169}$$

$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1\,, \tag{2.170}$$

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x\,, \tag{2.171}$$

$$\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x\,. \tag{2.172}$$

2.9.3.2. Hiperbolikus függvény előállítása azonos argumentumú másikkal

Áttekinthetőség céljából a megfelelő képleteket a **2.7. táblázatban** foglaltuk össze.

2.7. táblázat. Egyező argumentumú hiperbolikus függvények közötti összefüggések $x > 0$ esetén

Függvény	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\operatorname{cth} x$
$\operatorname{sh} x$	–	$\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$	$\dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}$	–	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}$	$\dfrac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}$
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}$	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}$	–	$\dfrac{1}{\operatorname{cth} x}$
$\operatorname{cth} x$	$\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x}$	$\dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$	–

2.9.3.3. Ellentett argumentumpárokra vonatkozó képletek

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x\,, \tag{2.173}$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x\,, \tag{2.174}$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x\,, \tag{2.175}$$

$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x\,. \tag{2.176}$$

2.9.3.4. Hiperbolikus függvények két argumentum összegéhez és különbségéhez tartozó értékei (addíciós tételek)

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y\,, \tag{2.177}$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y\,, \tag{2.178}$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}\,, \tag{2.179}$$

$$\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}\,, \quad (x \neq -y,\ \text{ill. } x \neq y)\,. \tag{2.180}$$

2.9.3.5. Hiperbolikus függvényeknek az eredeti argumentum kétszeresén felvett értékei

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \,, \tag{2.181}$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x \,, \tag{2.182}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \,, \tag{2.183}$$

$$\operatorname{cth} 2x = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2 \operatorname{cth} x} \,. \tag{2.184}$$

2.9.3.6. Moivre-képlet hiperbolikus függvényekre

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx. \tag{2.185}$$

2.9.3.7. Hiperbolikus függvényeknek az eredeti argumentum felén felvett értékei

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - 1)} \,, \quad (x \neq 0) \tag{2.186}$$

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + 1)} \,. \tag{2.187}$$

(2.186)-ban a négyzetgyök előjelét $x > 0$ esetén pozitívnak, $x < 0$ esetén negatívnak kell venni.

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} \,, \tag{2.188}$$

$$\operatorname{cth} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x} \,. \tag{2.189}$$

(2.188)-ban az első egyenlőségben és (2.189)-ben mindkét törtkifejezésben $x \neq 0$.

2.9.3.8. Hiperbolikus függvény két helyen felvett értékének összege és különbsége sh-val és/vagy ch-val kifejezve

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2} \,, \tag{2.190}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2} \,, \tag{2.191}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2} \,, \tag{2.192}$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y} \,. \tag{2.193}$$

2.9.3.9. Összefüggés a hiperbolikus és a trigonometrikus függvények között komplex z argumentum esetén

$$\sin z = -\mathrm{i} \operatorname{sh} \mathrm{i}z \,, \tag{2.194}$$

$$\cos z = \operatorname{ch} \mathrm{i}z \,, \tag{2.195}$$

$$\operatorname{tg} z = -\mathrm{i} \operatorname{th} \mathrm{i}z \,, \tag{2.196}$$

$$\operatorname{ctg} z = \mathrm{i} \operatorname{cth} \mathrm{i}z \,, \tag{2.197}$$

$$\operatorname{sh} z = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z \,, \tag{2.198}$$

$$\operatorname{ch} z = \cos \mathrm{i}z \,, \tag{2.199}$$

$$\operatorname{th} z = -\mathrm{i} \operatorname{tg} \mathrm{i}z \,, \tag{2.200}$$

$$\operatorname{cth} z = \mathrm{i} \operatorname{ctg} \mathrm{i}z \,. \tag{2.201}$$

Minden képlet, amely a szinusz, koszinusz hiperbolikusz függvények x vagy általánosabban ax (de nem $ax + b$) argumentumhoz tartozó értékeit egymással összekapcsolja, levezethető a szinusz, koszinusz trigonometrikus függvények α argumentumhoz tartozó értékeit összekapcsoló megfelelő képletekből úgy, hogy $\sin \alpha$ helyébe az $\mathrm{i} \operatorname{sh} x$, $\cos \alpha$ helyébe pedig a $\operatorname{ch} x$ kifejezést írjuk.

■ **A:** $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, $\operatorname{ch}^2 x + \mathrm{i}^2 \operatorname{sh}^2 x = 1$ vagyis $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

■ **B:** $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\mathrm{i} \operatorname{sh} 2x = 2\mathrm{i} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ vagyis $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Az eddig említetteken kívül is minden algebrai, gyökmentes, trigonometrikus és hiperkolikus függvényeket tartalmazó azonosság a komplex függvénytan egyértelműségi tétele következtében érvényes komplex argumentumra is, ha a szereplő kifejezések értelmesek. Ehhez l. még 14.5.2.4.-et.