

Róka Sándor

UTAK, KERESZTEZŐDÉS NÉLKÜL

Róka Sándor

**UTAK,
KERESZTEZŐDÉS
NÉLKÜL**

Rejtvényes matematika





A könyv megjelenését a Nemzeti Kulturális
Alap a kiadói program keretében támogatta.

© Róka Sándor, Typotex, Budapest, 2026
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Lektorálta Vépy-Benyhe Judit

ISBN 978 963 493 381 6

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról, akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Balázs Péter
Szerkesztette: Széll Szilvia
Tördelés: Szalay Éva
Borítóterv: Tillai Tamás
Készült a Multiszolg Bt. nyomdájában
Felelős vezető: Kajtor Bálint

TARTALOM

BEVEZETÉS	9
ÚTVONALAK	13
Utak, kereszteződés nélkül	14
Útkeresés a négyzet rácson	17
Utak 3 ház és 3 kút között	18
Szám labirintus	19
A páncélszekrény zárja	21
Hamilton-körök	22
Königsbergi hidak	25
Válaszok, megoldások	28
HOGYAN FOLYTATNÁD?	33
Mik a hiányzó számok?	34
Számhálózat	35
Nézd és mondd!	36
Válaszok, megoldások	39
TÁVOLI SZOMSZÉDOK	41
Egymást követő számok távol egymástól	42
Az összekötött számok különbözőek	44
Hat különböző szám a hatszög körül	45
Hatszöges sudoku	46
Leltározó hatszögek	47
Válaszok, megoldások	48
BŰVÖS KITÖLTÉSEK	51
Mágikus kitöltések	52
Bűvös H	55
Bűvös hatszög	56
Válaszok, megoldások	59

ÖSSZEADÓ TÁBLÁK	65
Számfa	66
Teljes kitöltések	67
Összeadó táblázatok	69
Egyenlő összegek, egyenlő szorzatok	71
Válaszok, megoldások	72
GYŰJTŐKÖRÚT	75
Számkörút	76
Számösvény	78
Számkígyó	80
100-as út	81
Egyenlő térfelek	82
Egyenlő összegek	83
Válaszok, megoldások	84
SZÁMOLÓMESTEREKNEK	89
Egy történet a kis Gaussról	90
Szorzótábla	92
Mi a jó sorrend?	93
Hogyan kapunk 24-et?	94
Mesterhármas	95
Nyerő számötös	96
Műveletsor-építés	97
Nehezebb műveletsorok	98
Osztó-többszörös	99
Válogatott osztók	100
A piramis csúcsa	101
Fordított piramis	102
Lóugrásos kitöltő	104
Kisebb, nagyobb	105
Válaszok, megoldások	108
MESTERLOGIKA	117
Mi van a kártyalap hátoldalán?	118
Kakukktójás a számkeresztrejtvényben	119

Titkosított számok	121
Mastermind	123
Kódfejtés	126
Válaszok, megoldások	127
TÉRKÉPSZÍNEZÉS	133
Négyszíntétel	134
Színezés négy színnel	137
Válaszok, megoldások	139
BÁBUK A SAKKTÁBLÁN	141
Huszárok a sakktáblán	142
Bábuk a 4×4 -es sakktáblán	144
Bábuk a 6×6 -os sakktáblán	145
Magányos rácspontok	146
Rácspontok kettesével	148
Hét foglalt mező	151
Válaszok, megoldások	153
DARABOLÁS EGYBEVÁGÓ RÉSZEKRE	159
Darabolj egybevágó részekre!	160
Darabolás öt részre	162
Körlap feldarabolása egybevágó részekre	163
A szabályos hatszög darabolása	164
Válaszok, megoldások	165
DARABOLÁS SOKSZÖGEKRE	169
A négyzet darabolása	170
A szabályos háromszög darabolása	171
Tortaosztás	172
Válaszok, megoldások	173
DARABOLÁS NÉGYZETEKRE, KOCKÁKRA	175
A 9×10 -es téglalap darabolása	176
Négyzet darabolása négyzetekre	177
Kocka darabolása kockákra	179
Válaszok, megoldások	180

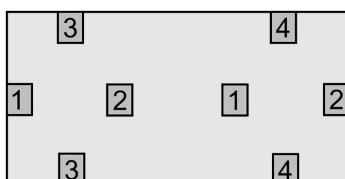
DARABOLÁS TÉGLALAPOKRA	183
Tartós falazás	184
1×2 -es arányú téglalapok	186
Négyzet darabolása különböző méretű téglalapokra	187
Téglalap darabolása öt téglalapra	188
Négyzet darabolása különböző oldalhosszú téglalapokra	190
Négyzet darabolása hét téglalapra	191
Válaszok, megoldások	192
KOCKAÉPÍTMÉNYEK	199
Kockák az asztalon	200
Kockaépítés	201
A kocka síkmetszete	202
Szabályos sokszög a kocka felszínén	203
Érintkező kockák	204
Válaszok, megoldások	206
GEOMETRIAI KIRAKÓK	211
Puzzle öt háromszögből	212
Három karácsonyfa	214
Hová tűnt a terület?	215
A kettévágott szalvéta	216
Válaszok, megoldások	217
PONTOK, EGYENESEK, SOKSZÖGEK	219
Pontok a síkon	220
Séta állandó lépéshosszal	223
Növekvő távolságok	224
Különböző távolságok	226
Különböző irányok	227
Metsző sokszögek	228
Képtárprobléma	230
Tizenegy színes korong	232
Válaszok, megoldások	233

BEVEZETÉS

Szeretjük a rejtvényeket, szeretünk rejtvényt fejteni. Jó átélni a gondolkodás örömét, nagy élmény rájönni valamire. Egy nehéz feladvány önálló megoldása önmagában is élmény – különösen, ha azt egy hosszan tartó küzdelem után érjük el. Ezért, ennek örömeért játszunk, kitöltjük a sudokut, megfejtjük a keresztrejtvényt.

Talán a legjellemzőbb emberi tulajdonság, amely megkülönböztet minket más élőlényektől, a problémamegoldó képességünk. A rejtvényfejtés jó iskolája a gondolkodás fejlesztésének. Ebben a gyorsan változó világban előnyös tulajdonság a rugalmas, kreatív gondolkodás.

Egy friss diplomás mérnök felvételizett valamelyik IT-céghez, és az állásinterjún a HR-es nem a szakmai felkészültségét tesztelte, hanem arra volt kíváncsi, hogy talál-e jó megoldást egy nehéz helyzetben. Azt a feladatot adta neki, hogy az ábrán lévő két-két azonos számot kösse össze: az 1-est az 1-essel, a 2-est a 2-essel, a 3-ast a 3-assal és a 4-est a 4-essel. Úgy kösse össze őket, hogy az összekötő vonalak a kereten belül haladjanak, ne keresztezzék egymást, és ne érintsék a többi számot.



Értékes tudás az, ha tudjuk kezelni a problémahelyzeteket, és megtaláljuk a kivezető utat, a megoldást. A gondolkodás hatékonyságának fejlesztése a fontos, és nem az, hogy beprésszük a gyerekek fejébe az adatok tömegét. Az iskola célja az legyen, hogy gondolkodni szerető és tudó fiatalokat neveljen.

Az ábrán látható rejtvény mellett a Facebookon ez a bejegyzés állt: „Ismerem a rejtvényt. Ezt egy 7-8 éves gyerek gyorsan megfejti, míg egy mérnökembernek órák kellene ehhez.”

8809	6	7662	2	8193	3	6855	3
7111	0	9313	1	8096	5	9881	5
2172	0	0000	4	1012	1	5531	0
6666	4	2222	0	7777	0	2581	?
1111	0	3333	0	9999	4		
3213	0	5555	0	7756	1		

Ez így rendben van? Jól működik az iskola? Az iskolába menő kisgyereket érdekli a világ, kíváncsi. Elkezdődik az iskola, és a kíváncsiság, az érdeklődés csökken, zuhan, eltűnik. Az iskola nem kielégíti a kíváncsiságot, hanem kiöli. „Ne beszélj a bolygómozgásokról, majd hetedikben! Most figyelj!” Sablonokat, algoritmusokat, recepteket tanítunk, amelyeket a gyerek később elfelejt.

Arra való a gyerek, hogy a saját fejével gondolkozzon, kérdezzen, önálló döntéseket hozzon. Arra kell felkészíteni, hogy megoldja a problémákat. Találkozzon szokatlan helyzetekkel, tapasztalja meg, milyen élmény önállóan rájönni valamire.

Az iskolai oktatás eredményességét magunkon is tesztelhetjük: tudjuk-e a választ erre az elsős iskolai tankönyvben szereplő feladatra – amelyet a gyakorlóiskola tanárjelöltjeinek nem sikerült megfejteniük...?

7	6	4	8	5	5	9	6
8	5	6	9	4	7	8	
8	6	6	9	5	7		8

Ez a kérdés: milyen számok illenek az üres mezőkbe?

Élményekkel jár egy rejtvény megfejtése, gondolkodni öröm. Ehhez gyűjtöttem szép feladványokat azoknak, akik szeretik a kihívásokat.

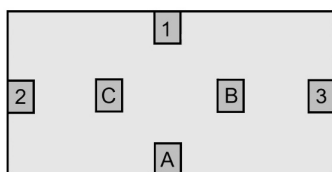
ÚTVONALAK

Utak, kereszteződés nélkül

1945-ben jelent meg Pólya György (1887–1985) *How to Solve It* című különleges könyve, amelyet sok nyelvre lefordítottak, és milliós példányszámban adtak el. A magyar kiadás címe: *A gondolkodás iskolája*. A könyv a problémamegoldás módszereit írja le, és a mesterséges intelligencia megjelenése óta erről a kérdésről egyre többet tudunk.

Ian Stewart a könyv 1990-es kiadásához írt előszavában elmeséli, hogy 1988-ban részt vett egy tévéműsor előkészítésében, ahol a játékosok rejtvényes feladatokat kaptak: olyan matematikai ötleteken alapuló, egyszerű feladványokat, amelyek élvezhetővé, átélhetővé teszik a matematika élményét. Ebben az előszóban bemutat egyet közülük.

Kösd össze vonallal az ábrán lévő 1-est az A-val, 2-est a B-vel és 3-ast a C-vel. Úgy kösd össze őket, hogy az összekötő vonalak a kereten belül haladjanak, ne keresztezzék egymást, és más számot se érintsenek.

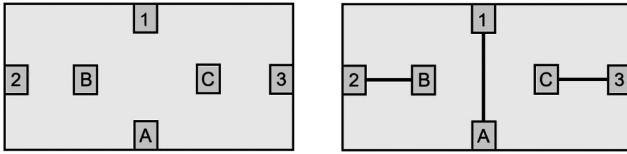


Első pillantásra úgy tűnik, hogy a probléma megoldhatatlan, mert ha az 1-est és az A-t egyenes vonallal összekötjük, akkor a téglalap két részre oszlik, és a vonal elválasztja 2-est a B-től, 3-ast a C-től.

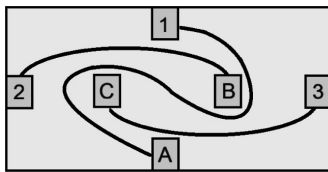
De hát nem azt kérték tőlünk, hogy az 1-est és az A-t egyenes vonallal kössük össze?

Látható, hogy nem számít a téglalap mérete, sőt a formája sem: téglalap helyett akár kör vagy ellipszis is lehetne.

Ha B és C helyet cserél, akkor ez egy unalmas, ránézésre megoldható feladat.

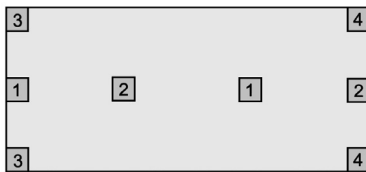


Ezt a cserét meg kell szüntetni. Az összekötő vonal nem feltétlenül egyenes, lehet egy kanyargó vonal is. Toljuk vissza eredeti helyükre a B és C betűket, és mozgatás közben a vonalak alakját rugalmasan alakítsuk úgy, hogy elkerüljük az ütközést, a kereszteződést.

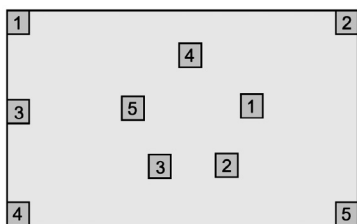


Feladat. Kösd össze az azonos számokat (azaz 1-est az 1-es-sel, 2-est a 2-essel stb.) úgy, hogy az összekötő vonalak a kereten belül haladjanak, és ne keresztezzék egymást.

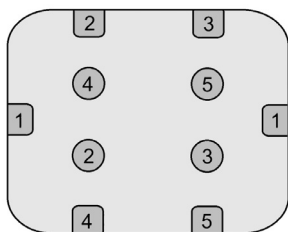
a)



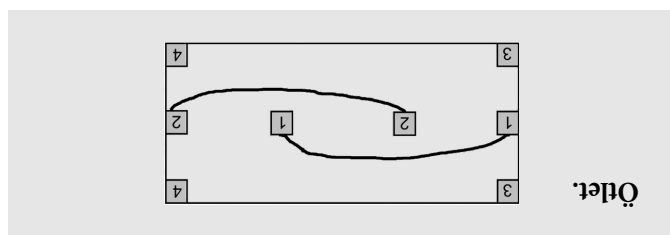
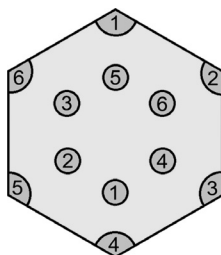
b)



c)



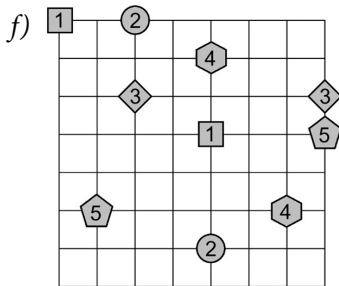
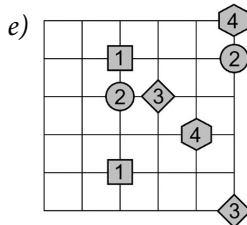
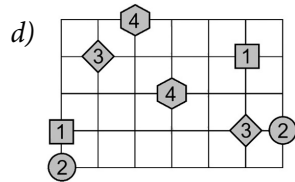
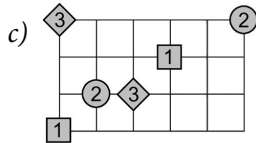
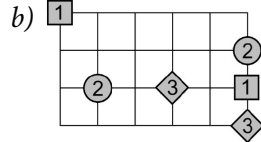
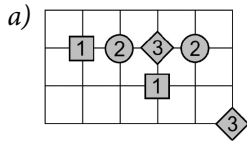
d)



Ölet.

Útkeresés a négyzetrácson

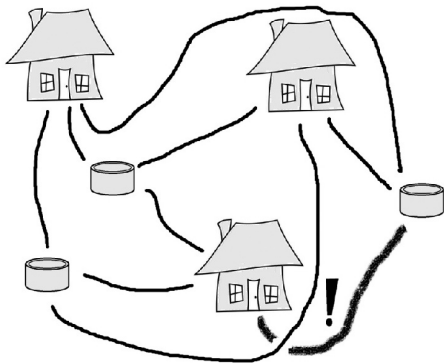
Feladat. Kösd össze az azonos számokat (azaz 1-est az 1-es-sel, 2-est a 2-essel stb.) úgy, hogy a rácsvonalakon haladó összekötő vonalak ne érintkezzenek egymással, és más számot se érintsenek.



Ötlet. Segít, ha találsz olyan számpárt, amelyek között az összekötő útra csak egy-két lehetőség van.

Utak 3 ház és 3 kút között

Egy régi feladvány a „3 ház – 3 kút”-probléma: össze lehet-e kötni három házat és három kútát úgy, hogy minden házat minden kúttal egy út köt össze, és az így keletkező utak nem keresztezzék egymást?



Feladat. Tehát van három ház és három kút. A házakat és a kutakat úgy helyezed el a síkon, ahogyan akarod. Össze tudod-e kötni a házakat a kutakkal úgy, hogy az összekötő utak ne keresztezzék egymást?

Ölet. Bárhogyan helyezzük el a házakat és kutakat, nem lehet közöttük megrajzolni az utakat úgy, hogy azok ne keresztezzék egymást.

Számlabirintus

A feladvány készítője az amerikai Samuel Loyd (1841–1911), a szellemes fejtörők egyik legeredetibb mestere. A feladat a következő: a középső 3-astól indulva kell kijutni a labirintusból. Lépni a nyolc égtáj irányába lehet (észak, kelet, dél, nyugat, északkelet, délkelet, délnyugat, északnyugat), és a lépések számát mindig az a szám mutatja, amelyiken állunk. Így például a középső 3-asról léphetünk északnyugati irányba, és a 2-esre érkezünk.

Kijutni csak úgy lehet, ha az utolsó alkalommal az utolsó lépés visz a szabadba. Például ha az utolsó alkalommal ötöt lépünk, az ötödik lépésben kell a szabadba érni. Így kijuthatunk egy szélén lévő 1-esről vagy az utolsó sor első 3-asáról hármat lépve keletre.

```

      4 7 7
    5 4 4 8 3 3 4 6 3
  1 4 5 1 1 1 4 5 1 7 1 3 5
4 9 4 9 6 7 5 5 5 8 7 6 6 8 5
3 7 2 9 8 3 5 6 7 3 9 1 8 7 5 8 5
1 4 7 8 4 2 9 2 7 1 1 8 2 2 7 6 3
7 2 1 8 5 5 3 1 1 3 1 3 3 4 2 8 6 1 3
4 2 6 7 2 5 2 4 2 2 5 4 3 2 8 1 7 7 3
4 1 6 5 1 1 1 9 1 4 3 4 4 3 1 9 8 2 7
4 3 5 2 3 2 2 3 2 4 2 5 3 5 1 1 3 5 5 3 7
2 7 1 5 1 1 3 1 5 3 3 2 4 2 3 7 7 5 4 2 7
2 5 2 2 6 1 2 4 4 6 3 4 1 2 1 2 6 5 1 8 8
4 3 7 5 1 9 3 4 4 5 2 9 4 1 9 5 7 4 8
4 1 6 7 8 3 4 3 4 1 3 1 2 3 2 3 6 2 4
7 3 2 6 1 5 3 9 2 3 2 1 5 7 5 8 9 5 4
1 6 7 3 4 8 1 2 1 2 1 2 2 8 9 4 1
2 5 4 7 8 7 5 6 1 3 5 7 8 7 2 9 3
6 5 6 4 6 7 2 5 2 2 6 3 4 7 4
2 3 1 2 3 3 3 2 1 3 2 1 1
  7 4 4 5 7 3 4 4 7
    3 3 4

```

Feladat. Hogyan lehet kijutni a labirintusból?

Ölet. A szabadba vivő utolsó lépés egy 4-esről indul.
Gondolkodhatsz visszafelé.

A páncélszekrény zárja

Egy páncélszekrénynek a zárja csak akkor nyílik, ha a megfelelő sorrendben minden gombot pontosan egyszer megnyomunk. Az utolsó gomb jele 0. Mindegyik gomb a következő lépés számát és irányát jelzi. Így az 1F azt jelenti, hogy onnan egyet kell lépni felfelé, míg a 2B azt, hogy kettőt kell lépni balra.

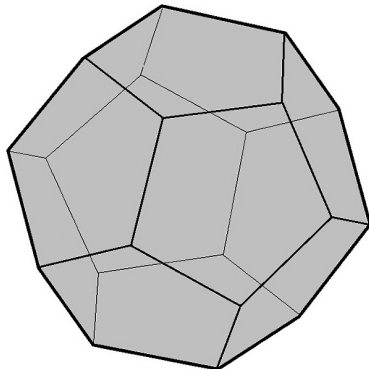
3J	4L	2B	2B	2L
3J	3J	3L	2B	2L
1J	1L	0	3B	2B
2F	1B	3F	1F	2B
4J	1B	1J	1F	4F

Feladat. Mi van arra a gombra írva, amelyet először kell megnyomni?

Ötlet. Kövessd a lépéseket a fordított úton, és visszafele haladva eljutsz a „bejáratához”.

Hamilton-körök

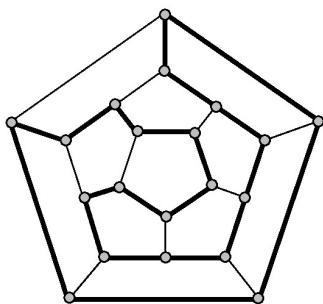
Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), a hírneves ír matematikus 1859-ben egy különleges fejtörő játékot hozott forgalomba. Ehhez fából készített egy szabályos dodekaédert.



A dodekaéderjáték minden csúcsa egy-egy ismertebb város nevével volt megjelölve, például Brüsszel, Kanton, Delhi, Frankfurt stb. Az a feladat, hogy tervezzünk olyan körutat, amely minden várost érint, és mindegyiken egyszer halad át. Ehhez Hamilton a dodekaéder csúcsaiba szögeket vert, amelyeken keresztül egy fonalat kellett végigvezetni.

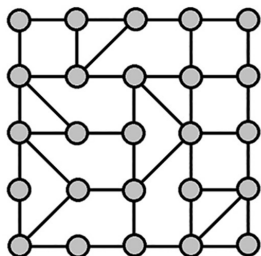
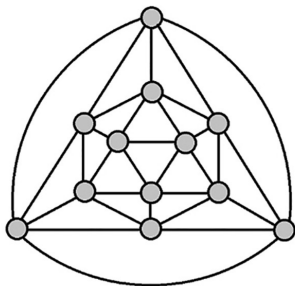
Akit a játék részletesebben érdekel, az a „Hamiltonian path” és „icosian game” keresőszavakkal részletesebb információt is talál róla az interneten.

A dodekaédert ábrázolhatjuk a testhálójával, így könnyebb a síkban megtervezni a keresett körutat.



Az ábrán egy megoldást látunk.

Feladat. Keresz olyan körutat (Hamilton-kört) a megrajzolt útszakaszokon, amely mind a tizenkét, illetve huszonöt kört érinti, és mindegyiken egyszer halad át.



Hamilton játékára emlékeztet az ókori római dodekaéder. Ennek az általában bronzból készült, szabályos dodekaéder alakú üreges tárgynak a mérete 4 és 11 cm között változott, minden csúcsában egy kis fémgolyó volt, és minden lap közepén egy kör alakú lyuk.



Máig rejtély, hogy mire használták ezeket a tárgyakat.

Ölet. Az út bármelyik körből indulhat. Így kekezz minél hosszabb útvonalat építeni. Zsákutca esetén lép) vissza egy korábbi útelágazáshoz. Mindkét feladattal létezik körút.