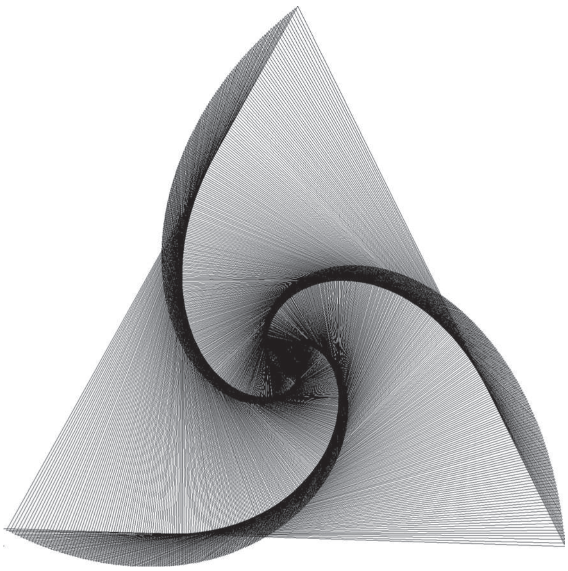
KERTÉSZ VIKTOR

EGYSZERŰ? BONYOLULT?

KERTÉSZ VIKTOR

EGYSZERŰ? BONYOLULT?



ad LIBRUM

BUDAPEST, 2024

ISBN 978-615-6439-31-4

info@adlibrum.hu
www.adlibrum.hu
facebook.com/Adlibrum

Az Ad Librum Kft. tagja
a Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének (MKKE)
és a Magyar Könyvkiadók Érdekvédelmi Szövetségének (MKÉSZ).

Főszerkesztő: Pordány Katalin
Felelős szerkesztő: Bíró Csilla
Tördelés: Tímár Tamás
Nyomda: Pannónia Nyomda Kft.

TARTALOM

BEVEZETŐ

Vajon meg tudjuk-e határozni általánosan, hogy mi az *egyszerű,* ami egyszerű, az mitől egyszerű, és miben nyilvánul meg az egyszerűség? Meg tudunk-e válaszolni ugyanilyen kérdéseket a bonyolultra vonatkozóan? Mi a *bonyolult,* vagy a szinonimáját használva mi a *komplex?* Ami komplex, az mitől az, és miben nyilvánul meg a komplexitás? Természetesen adhatunk bizonyos válaszokat pusztán a józan észre támaszkodva. És ezek többé-kevésbé helytállóak is lesznek. A válaszok nagy valószínűséggel mindig csak valamilyen speciális esetre vonatkoznak. Általánosan érvényes választ ma még nem tudunk adni. Túlságosan *bonyolult* az egyszerűség/bonyolultság problémája. Célunk e munkában csak az, hogy a két fogalom meglepő kapcsolatát boncolgassuk, néhány érdekes és különös aspektusra világítsunk rá, és sok tanulságos példát mutassunk.

Vajon csak emberi vonatkozásban létezik egyszerű és bonyolult, vagy tőlünk emberektől függetlenül a dolgoknak és jelenségeknek is léteznek ezek a tulajdonságai? Az egyszerű csak attól egyszerű, hogy könnyen megértjük, átlátjuk, kezeljük, ami elkészítendő, azt könnyen tudjuk elkészíteni, legyártani stb.? Ha probléma, akkor könnyen megoldjuk? Ha pedig bonyolult, akkor csak azért bonyolult, mert mi, emberek nehezen értjük meg, nehezen találjuk ki a működését, nehezen boldogulunk vele, nehezen alkotjuk meg, vagy nehezen oldjuk meg? Ha ezek ilyen szubjektív fogalmak, akkor embere válogatja, kinek mi az egyszerű és mi a bonyolult. Ebben feltétlen van igazság.

Kérdésünk: létezik-e olyan objektív meghatározás, amely már nem függ az emberi képességektől? Sőt létezik-e az egyszerű-bonyolult skálájának valamilyen meghatározható mértéke?

Az emberiséget több ezer éve izgatja a bonyolultság. A komplex rendszerek tudományos igényű tanulmányozása viszonylag új és különböző tudományterületekről indult el. Például a matematikában az egyik legnagyobb lökést a nemlineáris dinamikai rendszerekben felfedezett káosz adta. Ugyancsak hatalmas lökést adott a gazdaságot és a mindennapi életet egyre inkább átszövő titkosítási igény. A titkosan kódolt személyi, banki és egyéb adatoknak feltörhetetlenül bonyolultnak kell lenniük. A komputerek és a numerikus módszerek gyors fejlődése során egyre-másra olyan problémákkal szembesültek a szakemberek, amelyek nehezen megoldhatónak vagy szinte megoldhatatlannak bizonyultak. Az elméleti számítógép-tudományon és a matematikán belül ez a tény vezetett el egy új tudományterület, a számítási komplexitás *(computational complexity theory)* kialakulásához [B.1.].

Nagyon is aktuális ez a problémakör. A komplexitás kérdése ma már fontos szerepet kap szinte minden tudományterületen. Minden diszciplínának megvan a maga elgondolása a komplexitásról.

1984-ben alapították a Santa Fe Intézetet (Santa Fe Institution, USA, New Mexico, Santa Fe) [B.2.]. Ez volt a világon az első olyan intézet, amelynek célja a komplex rendszerek tanulmányozása. Ennek a független, nonprofit kutató- és oktatóközpontnak a kutatói igyekeznek feltárni, és egységben megérteni a fizikai, biológiai, társadalmi, kulturális, technológiai és lehetőség szerint az asztrobiológiai világban fellelhető komplex jelenségeket, mintázatokat. Mindezt az emberiség jóléte érdekében.

A gazdasági és társadalmi élet legkülönbözőbb területein gyakran felbukkan valamely rendszer bonyolultságának kérdése. Az adott rendszer kezelhetősége, menedzselhetősége igényli, hogy világos legyen számunkra az, hogy mitől bonyolult. [B.3.]-ban a szerzők az egészségügyi ellátórendszerek komplexitását veszik górcső alá. Munkájuknak már a bevezetőjében rövid és velős áttekintést adnak a komplexitás mibenlétéről.

A Komplex Hálózatok Kutatási Központját (The Center for Complex Network Research – CCNR, Barabási Lab) Bostonban a magyar származású Barabási Albert-László (1967–) amerikai fizikus vezeti [B.4.], [B.5.]. Weblapjuk egy sor fantasztikusan érdekes, témába vágó publikációt is bemutat. A természetnek és a társadalomnak szinte nincs olyan területe, amelyben ne merülne fel a komplex hálózatok problémája.

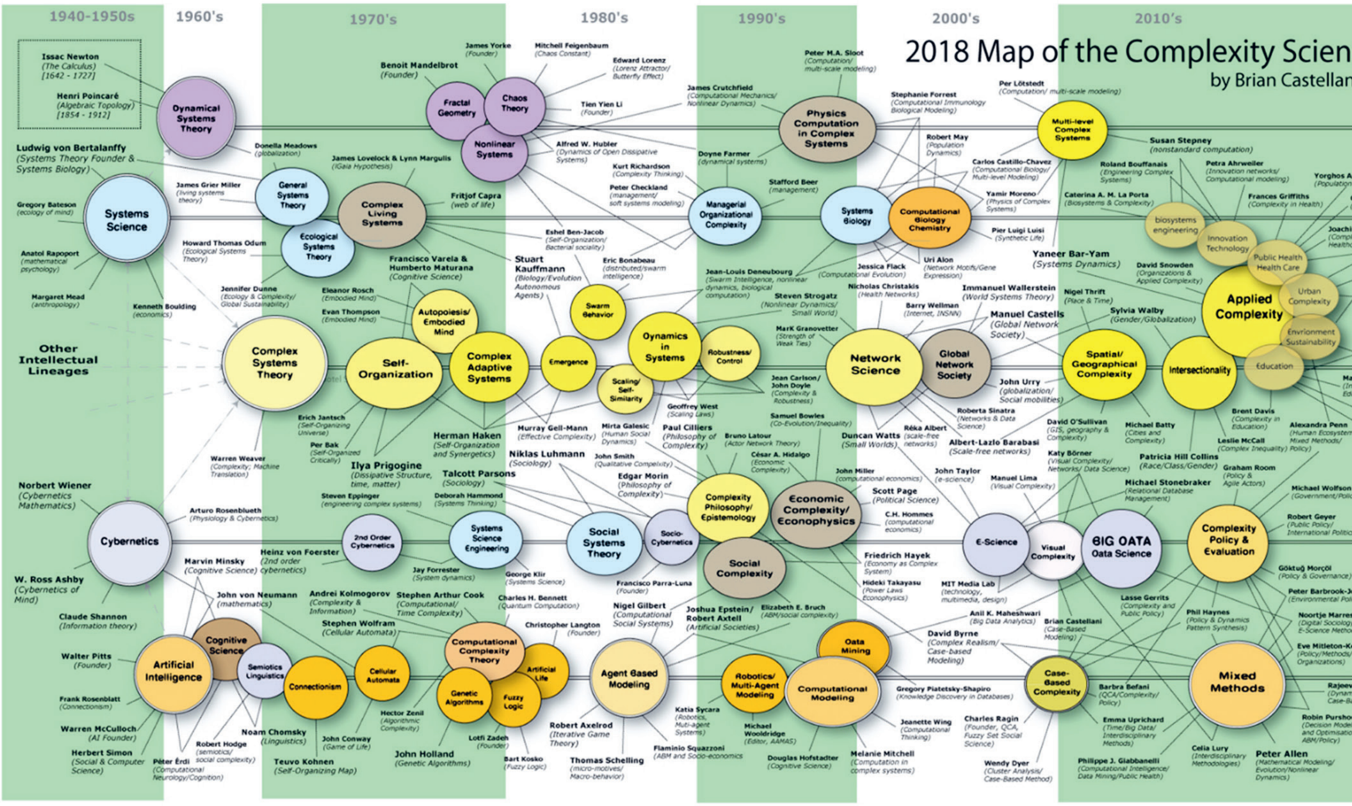
A különleges és bonyolult jelenségek megértésében és felfogásában jelentős szerepet játszik a vizualizálás. 2020-ban és 2021-ben a budapesti Ludwig Múzeum és a karsruhei ZKM (Zentrum für Kunst und Medien) adott otthont annak a kiállításnak, amelyben a Barabási Lab a komplex hálózatokban fellelhető mintázatok művészi megjelenítési lehetőségeit mutatta be [B.6.], [B.7.]. Ennek kapcsán egy-egy album jelent meg angol és magyar [B.8.] nyelven egészen különleges képekkel.

A komplex rendszerek egy része statikus abban az értelemben, hogy változatlan a struktúrája. Ezzel szemben az élővilágra a változás, az evolúció a jellemző. Az evolúció a klasszikus darwini narratívájában három mozzanaton alapul. 1. Az adott faj populációja utódokat képes létrehozni, amelyek öröklik a faj jellemzőit. 2. Az utódokban véletlen mutációk jelennek meg. Az adott környezetben e véletlen mutációk életképessége, fittsége különböző. 3. A nagyobb fittséggel rendelkező utód szelektivitási előnnyel rendelkezik, amennyiben magasabb a reprodukciós képessége. Ezek az egyedek nagyobb számmal hoznak létre utódokat, és örökítik át saját tulajdonságaikat a következő generációba, mint a kevésbé fittek. Így az idő folyamán automatikusan az optimális változatok szelektálódnak. A faj egyre jobban alkalmazkodik az adott környezethez (adaptáció). Az evolúció a földi életben semmivel össze nem hasonlítható sokszínűséget és komplexitást hozott létre. Az evolúció elve, az adaptáció nem korlátozódik a biológiára. Hasonló fejlődés figyelhető meg a gazdaságban, az ipar történelmi alakulásában, a komputertudományban stb. Sőt érvényesül az evolúció az emberiség történelmében is. A [B.9.] irodalom remek összefoglalását nyújtja a komplex adaptív rendszereknek.

A komplex rendszerek megismerésének rendkívüli fontosságát a 2021. évi fizikai Nobel-díj odaítélése is jól jellemzi: a díjat Syukuro Manabe (1931–) amerikai meteorológus, Klaus Hasselmann (1931–) német fizikus és Giorgo Parisi (1948–) olasz fizikus kapta a komplex fizikai rendszerek megértésében elért úttörő eredményeikért [B.10.].

Brian Castellani, a Durham Egyetem (UK) professzora 2018-ban elkészítette a komplexitási tudományok „térképét”, lásd a B.1 színes ábrát (https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_system, CC BY_SA 4.0, szerző: Brian Castellani). Csak néhány címszó a felsorolt számos tudományterületből: dinamikai rendszerek elmélete, káoszelmélet, rendszertudomány, komplex élőrendszerek, ökológiai rendszerelmélet, egészségügyi ellátás, kibernetika, mesterséges intelligencia. Brian Castellani és Lasse Gerrits (Erasmus University Rotterdam) közösen elkészítette e „térkép” újabb változatát [B.11.].

Nem is gondolnánk, hogy e teljesnek tűnő ábrának a hatalmas gyűjteményén túlmenően is alkalmazzák a komplex rendszerek elméletét.



B.1. színes ábra

Néhány példa: különböző művészeti ágak [B.12.], [B.13.], [B.14.], [B.15.], [B.20.], nyelvészet [B.16.], [B.17.], [B.18.], [B.19.], [B.21.].

Mindezeket átgondolva nem kételkedhetünk a komplexitás kutatásának jelentőségében. De szemben a komplexitással mit lehet vizsgálni az egyszerűségen, hiszen az lényegénél fogva *egyszerű,* ezáltal problémamentes. A kézenfekvő válasz, hogy a dolgok megértéséhez hozzátartozik ellentétük jó ismerete. A bonyolult ellentéte az egyszerű. Van azonban még egy indok, hogy az egyszerűvel is foglalkozzunk. Megmutatjuk majd, hogy a dolgok, jelenségek e kétféle kategorizálása néha kéz a kézben jár. Van, hogy azt is nehéz eldönteni, hogy bizonyos esetben egyszerűvel, vagy bonyolulttal állunk-e szembe. Vagy esetleg az adott vonatkozástól függ, hogy ugyanaz a valami egyszerű vagy bonyolult.

Látni fogjuk, hogy amint haladunk az egyszerűtől az egyre bonyolultabb felé, úgy egyre inkább a következőt tapasztaljuk. Ami egyszerű, annak a jövőbeli viselkedése, állapota könnyen és pontosan kiszámítható, determinált. Minél bonyolultabb valami, annál nehezebb a jövőbeli viselkedés vagy állapot előrejelzése. Sőt a bonyolultnál ez a nehézség annyira fokozódhat, hogy már lehetetlenné válik az előrejelzés. Ez a jövőkép véletlenszerű, kaotikus vagy teljes mértékben véletlen. [B.22.]-ben a kiszámíthatóság, véletlen és káosz különbözőségével és meglepő kapcsolatával foglalkoztunk. Érdekes átmeneteket találtunk. Lehetséges, hogy az egyszerű és bonyolult tanulmányozása megkönnyíti a kiszámíthatóság, véletlen és káosz mélyebb kapcsolatának megértését is? Ebben a vonatkozásban ez a könyv a [B.22.] folytatásának is tekinthető.

Ha a komplexitással foglalkozó tudományokat tengernek tekintjük, akkor ebben a könyvben csak cseppeket találunk ebből a tengerből. Reméljük, hogy ha e cseppekben nincs is benne az egész tenger, azért visszatükröznek valamit a tengerből.

E könyvben a → és ← jelek közé azok a matematikai levezetések, magyarázatok kerültek, amelyeket a matematika iránt kevésbé érdeklődő olvasó nyugodtan átugorhat.

1. A KOMPLEXITÁSELMÉLET TÖRTÉNETE NAGYON IS DIÓHÉJBAN

Komplex vagy komplikált?

Nagyon fontos, hogy a szavak mögött rejtőző tartalom világos legyen. Ezért sokszor érdemes a szó eredetét megvizsgálni. A *komplex* és a *komplikált* egyaránt a latinból származik. Eredetükből [1.1.], [1.2.] nem kapunk egyértelmű eligazítást mai használatukra.

A komplex a *com-* (= vele, együtt) előtag és a *plectere* (= szőni, fonni, összefonni, befonni, körülfonni, összesodorni) főnévi igenévből származik. A *plectere* főnévi igenévben megtaláljuk a *plek* (= sodor, befon, összefon) szógyökeret. A komplex szó mellett a *plek* szógyökér további származékjai a komplett, kompliment, implikáció, manipuláció, poligon stb.

A komplikált szóban ugyancsak megtaláljuk a *com-* előtagot. Ehhez járul a *plere*, illetve *pele* (= tölt, töm, megtöm, betölt) szógyökér. E szógyökér további származékjai a komplikált mellett: komplett, kompliment, implementáció, manipuláció stb.

A magyar nyelv értelmező szótára [1.3.] szerint a komplex melléknév fő jelentése: általában több különnemű tényezőből bonyolultan összetevődő. Az *Idegen szavak és kifejezések szótárá*ban [1.4.] a fő jelentés: bonyolultan összetett. E források szerint a komplikált jelentése bonyolult, nehezen áttekinthető, illetve bonyolult, szövevényes, nehezen áttekinthető. Tehát e két szó többé-kevésbé szinonima. A különbség: a komplexben benne van az összetettség.

A tudományos szakirodalom szóhasználata nem teljesen egyértelmű. Legtöbbször élesen megkülönbözetik a komplexet a komplikálttól. Bár mindkettőben benne van a bonyolultság, mégis jelentős tartalmi különbség van használatukban: a komplex minőségileg lényegesen magasabb fokú bonyolultságra utal, mint a komplikált. Ha bonyolult rendszerről beszélnek, akkor mindig a *komplex rendszer* kifejezést használják. Ezt a megkülönböztetett értelmezést fogjuk a továbbiakban követni.

A világban fellelhető bonyolultság minden időkben érdekelte a gondolkodó embereket. A tudományos megközelítés azonban meglehetősen későn kezdődött más tudományokhoz, például a matematikához, fizikához vagy kémiához képest. Érdemes néhány jelentős eseményt kiragadni a történelemből.

Occam borotvája

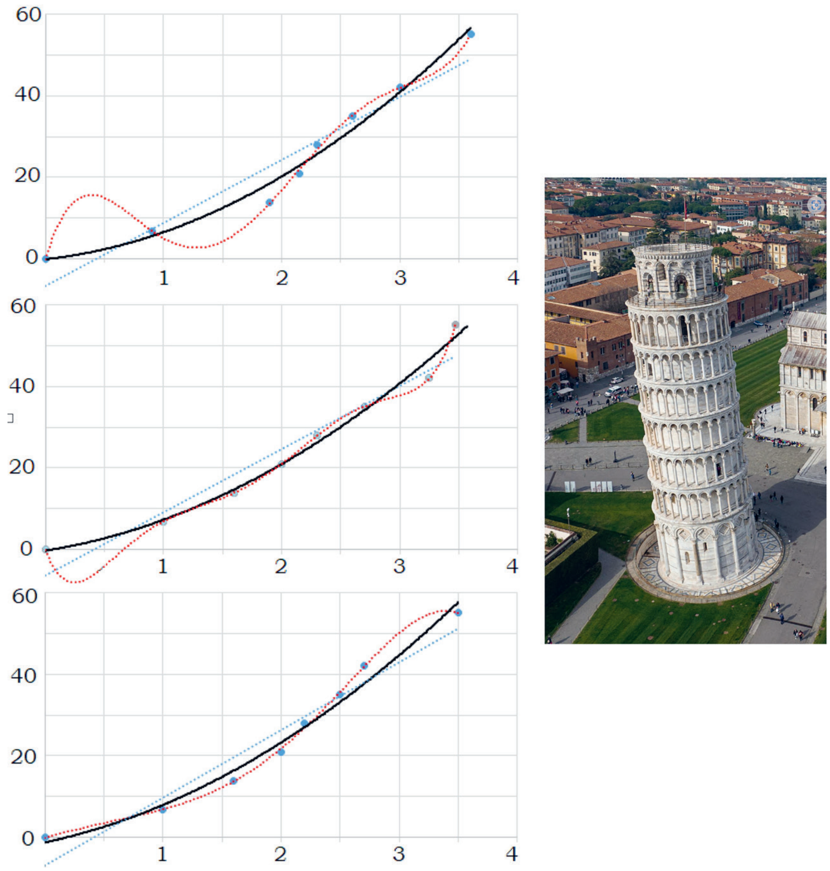
William of Occam (~1287–1347) angol ferences szerzetes, teológus és filozófus nevéhez kötik azt a filozófiai gondolatot, amelyet *Occam borotvája* névvel illetnek. E szerint, ha valami jelenség magyarázatát keressük, akkor ki kell gyomlálni, borotvával ki kell vágni ebből a magyarázatból a felesleges részleteket. Minél egyszerűbben tudunk valamit megmagyarázni, annál közelebb kerülünk az igazsághoz. Vagy ha van két elméletünk ugyanarra a jelenségre, akkor válasszuk az egyszerűbbet, a tömörebbet. Ezt az elvet latinul *lex parsimoniae*-nak is nevezik. Ez a kifejezés szó szerint a gazdaság törvénye, de itt helyesebb fordítás: a tömörség vagy egyszerűség törvénye.

Az, hogy egy-egy névhez kötünk valamilyen jelentős gondolatot, sokszor megtörténik. Mégis ritkán van az, hogy az a jelentős gondolat csak az említett személy fejéből pattant ki. Így van ez az Occam borotvájával is. Többek között már másfélezer évvel azelőtt Arisztotelésznél (i. e. 384–322), a nagy görög filozófusnál és matematikusnál is találkozunk hasonló eszmével.

Az Occam borotvája elv ma is helytálló. Vegyük azt a példát, amikor a való világ valamilyen törvényét akarjuk matematikai formába önteni. Ma már ez általános törekvés szinte minden tudományterületen. Tehát egy matematikai modellt alkotunk, amely jól leírja az adott törvénnyel lezajló folyamatokat. A matematikai modell *paraméter*eket, szabadon megválasztható konstansokat tartalmaz, amelyek értékét úgy kell megadni, hogy a matematikai modell jól szimulálja a valóságot. [Az ógörög παϱα- (para-) jelentése mellett, túl, a μέτϱον (metron) szóé pedig mérték.] A matematika felettébb „rugalmas”. Ez azt jelenti, hogy minél több paraméterünk van, annál könnyebb elérni az egyezést. Igen ám, de az egyezés önmagában még nem jelenti, hogy megtaláltuk a keresett törvényt. Annál nagyobb a valószínűsége, hogy megtaláltuk, minél kevesebb paraméterrel sikerül a helytálló szimuláció. Minél egyszerűbb matematikai modellel érjük el a korrekt eredményt, annál biztosabbak lehetünk a modell helyességében.

Egy nagyon egyszerű konkrét példán mutatjuk meg, mit jelent a sok, illetve kevés paraméter. Isaac Newton (1643–1727) angol fizikus és matematikus második törvénye szerint a szabadon eső test által megtett út az eltelt idő négyzetével arányos. Bárki elvégezhet egy kísérletet, amelynek során a magasból leejt egy tárgyat. Hogy jó közelítéssel kiküszöbölje a légellenállást, célszerű például egy tömör fémgolyóval próbálkozni. Ügyelni kell arra is, hogy esés közben a golyó semmilyen akadályba ne ütközzön. Galileo Galilei (1564–1642), a híres itáliai tudós, aki még nem ismerhette a newtoni törvényeket, állítólag éppen ezért választotta a pisai ferde tornyot (Torre pendente di Pisa) szabadeséses kísérletéhez. Gondolatban végezzünk egy kísérletet szabadon eső testtel a körülbelül 55 m magas torony tetejéről! Különböző magasságokban, mondjuk, 7 megfigyelő stopperolná az időt. A golyó durván 3,3 sec idő múlva érne földet. A kapott idő-út számpárokat egy grafikonban ábrázoljuk. Nehéz a pontos mérés. Három lehetséges eredményt az 1.1 színes ábrán (A fotó: https://en.wikipedia.org/wiki/Pisa, CC BY-SA 3.0, szerző: Arne Müseler) mutatunk. Magyarázzuk meg e három diagramot!

A kis kék pöttyök a mért értékeket mutatják: az idő függvényében a megtett utat. A mérési pontoknak mindig ugyanazon a parabolán kellene feküdniük, akárhányszor is végezzük el a kísérletet. Azonban az elkerülhetetlen mérési hibák miatt a pontok meglehetősen szóródnak. Van, ahol 20%-ot is elér a hiba. Háromféle vonalat próbáltunk a lehető legtökéletesebben illeszteni a 8 pontra (7 pont és az indulási 0 időpont és 0 hely). Adott görbe legjobb illesztésére egyértelmű matematikai módszer van. Az egyik vonal egyenes (kék pontozott), amelyben 2 szabad paraméter van. A másik parabola (fekete folytonos), amelyben 3 a szabad paraméterek száma. Végül egy hatodfokú polinom (piros pontozott) 7 szabad paraméterrel. Az egyenes mindhárom esetben rosszul illeszkedik. Kizárhatjuk, hogy a szabadon eső test az idővel arányos utat tesz meg. A parabola lényegesen rosszabbul illeszkedik, mint a hatodfokú polinom. Mégis határozottan a parabola mellett döntenénk, ha mi lennénk Galilei. Miért? Nem csodálkozunk, hogy a hatodfokú polinom minden



1.1. színes ábra

esetben tökéletesen illeszkedik a pontokra, mert ha 8 pontra illesztünk 7 paraméterrel, akkor szinte biztos a remek illeszkedés. Ugyanakkor mindhárom kísérletnél egészen más jellegű az illesztett hatodfokú görbe. Ebből világos, hogy csak a paraméterek nagy száma okozza a jó illeszkedést, és nem az, hogy rájöttünk az esés törvényszerűségére.

Ezzel szemben a parabola, bár kevésbé jól illeszkedik, két óriási előnynyel rendelkezik: 7 helyett csak 3 paramétert alkalmaztunk, és a görbe jellege mindhárom esetben ugyanolyan. Valóban itt a parabola jelenti a valódi fizikai törvényszerűséget.

Tehát Occam borotvája itt is helytálló elv. Szabadon átfogalmazva: A világ éppen eléggé bonyolult. Az elmélet és a magyarázat ne legyen bonyolult. Tömör, világos, cafrangoktól mentes teóriákra, értelmezésekre van szükség. Igyekezzünk a legbonyolultabb jelenségnek is a lehető legegyszerűbb magyarázatát megtalálni!

Nagyon bonyolult az égitestek mozgása. Ha csak a Naprendszert tekintjük az összes bolygóval, holddal, törpebolygóval, aszteroidával, meteorittal és az ember alkotta mesterséges „égitestekkel", a keringés, mozgás elképzelhetetlenül összetett kavalkádját észlelhetjük. És ennek az egész rendszernek a viselkedését lényegében három, elképesztően egyszerű törvény szabályozza. Newton három alaptörvénye közül a második és a harmadik, valamint a tömegvonzás törvénye. (Mivel a Naprendszerben nincs magára hagyott test, így Newton első törvénye nem játszik szerepet.) E három törvényt két egyenletben fejezhetjük ki. Ha az m tömegű testre F erő hat, akkor ez az erő

$$a = \frac{F}{m}$$

gyorsulásra kényszeríti a testet. Egy m_1 és egy m_2 tömegű test tömegeik szorzatával arányos és a köztük lévő r távolság négyzetével fordítva arányos erővel vonzza egymást. Az erő pontosan az őket összekötő egyenes mentén hat, és amennyivel az első test vonzza a másodikat, éppen ugyanolyan erővel vonzza a második az elsőt. Ez az F vonzó erő:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Ebben az utóbbi egyenletben G természeti állandó.

Talán nem is létezik még egy olyan elmélet, amelyik egyszerűségével, tömörségével szinte már esztétikai élményt nyújt, és amely ennyire általános érvénnyel igaz és alkalmazható. Ez az Occam borotvája elv talán legszebb megvalósítása.

Az univerzum mint óramű *(clockwork universe)*

Mi lehet egy bonyolult rendszer egyszerű magyarázata? Egy mechanikus óra szerkezete meglehetősen bonyolult. Különösen az volt Newton idejében. Newton ezt az óraszerkezetet alkalmazta metaforaként. Először az óra alkatrészeit kell vizsgálni, majd ezután ezek együttesét, magát a működő szerkezetet. Ilyen módon érthetjük meg a világot. Ezt a szemléletet fejezi ki a *clockwork universe* (óraműként működő univerzum) metafora. Ez a gondolkodásmód mint *redukcionizmus* vonult be a nyugati filozófiába. (A szó a latin *re* = vissza és *ducere* = vezetni összetételéből származik.) A klasszikus fizikában ez a megközelítés évszázadokig fantasztikusan termékenynek bizonyult. A redukcionizmus segített megtalálni az egyszerű magyarázatokat.

Occamhoz hasonlóan Newton is intett, hogy „Truth is ever to be found in the simplicity, and not in the multiplicity and confusion of things". (Az igazságot mindig az egyszerűségben találhatjuk meg és nem a dolgok sokaságában és összezavarásában [1.5.].) Kevés olyan tömör és mélységesen igaz matematikai modell létezik, mint a matematikai formában megfogalmazott négy newtoni törvény.

A redukcionizmussal szorosan összefügg a *determinizmus* és a *kiszámíthatóság*. (A latin *determinare* jelentése: meghatározni.) A determinizmus szerint az eseményeket teljes mértékben meghatározzák az előzmények, az eseményeket megelőző okok. Ha ezeket az előzményeket és okokat ismerjük, akkor kiszámítható az esemény további lefolyása, a jövője. A clockwork universe-ben, a determinált világban nincs helye a véletlennek.

A redukcionizmus mindaddig hatékony maradt, amíg fel nem fedeztek lényegesen bonyolultabb rendszereket a klasszikus fizika határain kívül. Kiderült, hogy egyrészt a makrovilággal szemben a mikrovilágban (kvantummechanika) nem érvényesek a klasszikus fizika determinista elvei. Másrészt léteznek olyan rendszerek, amelyek viselkedése, tulajdonságai nem érthetők meg az alkotó elemek megismerésével. Az *egész* olyasmit produkál, ami nincs benne a kölcsönható *részek*ben. Hiába ismerjük meg bármely élőlény összes szervét, ez nem elég ahhoz, hogy megértsük, milyen maga az élőlény. Itt a redukcionizmussal szemben a *holizmus* a helyes nézőpont. (A holizmus szó eredete a görög ὅλος holosz = egész.)

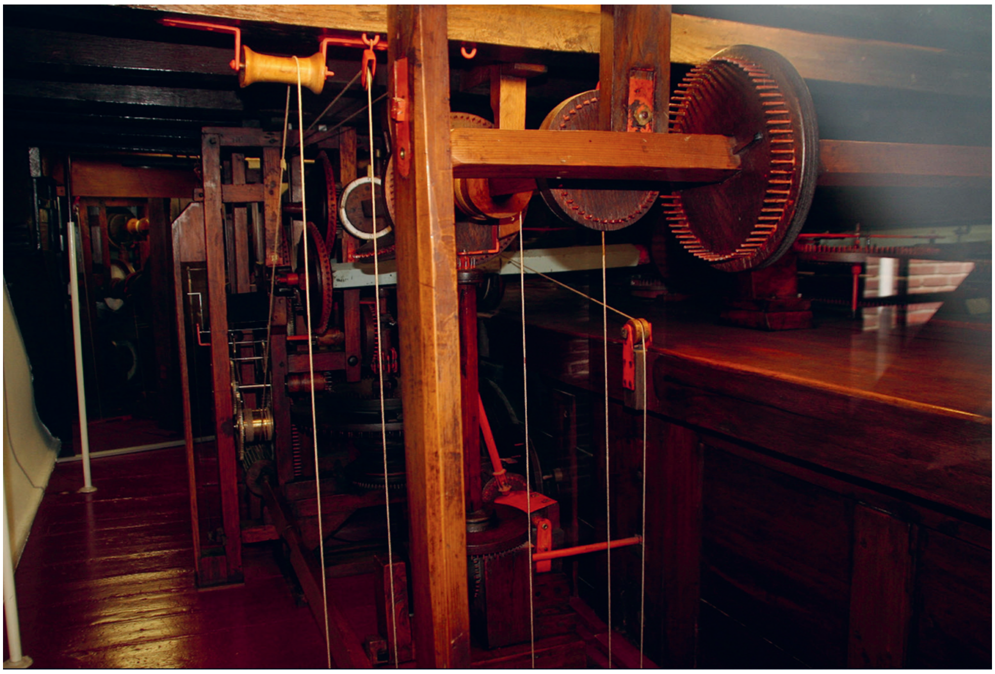
A részek tanulmányozása mellett az egészet is tanulmányozni kell. A redukcionizmus és a holizmus együtt alkalmazandó.

Alex Benjamin Novikoff (1913–1987) orosz zsidóként született, és családjával az Amerikai Egyesült Államokba emigrált amerikai biológus 1945-ben írta munkájában [1.6.], hogy az anyag fejlődése a szerveződés különböző szintjeinek sorozatán halad végig: fizikai, kémiai, biológiai és társadalmi szintek. E folytonos fejlődése során a komplexitás új szintjei szuperponálódnak az egyes részegységekre azáltal, hogy e részegységek szerveződése és integrációja útján egy új rendszer jön létre. (A *szuperpozíció,* szuperponál latin eredetű kifejezés. Latinul *super* = fölötte, rá; az ugyancsak latin *positio* = hely, helyzet. Integráció, integrál szintén latin eredetű. A latin *integer* = egész, teljes.) Ami egy különálló egész volt egy szinten, az résszé válik a magasabb szinten. A szerveződés minden szintje egyedi strukturális sajátságokkal és viselkedéssel bír, amelyek ugyan függenek az alkotó elemek sajátságaitól, de csak akkor érvényesülnek, ha ezek az elemek egy új rendszerré kombinálódnak.

Ezek az új gondolatok a világ lényegesen mélyebb megértéséhez vezettek, mint ahogyan az a klasszikus fizika keretein belül lehetséges volt. Ugyanakkor döbbenetes, hogy nem csupán a komplex rendszerekre igaz, hogy az egész több, mint a részek összessége, hanem még a newtoni metafora alapjául szolgáló óraszerkezetekre is. Hiszen a rugók, lendkerekek, fogaskerekek, csapágyak stb. (részek) sokaságát az emberi lelemény olyan szerkezetté (egésszé) építette össze, amelynek viselkedése soha nem lenne megérthető, ha nem ismernénk az összeszerelésnél alkalmazott elveket, ha csupán a halomba rakott alkatrészek különálló sokaságát ismernénk. Igaz azonban, hogy a bonyolultság fokát tekintve az óraszerkezetnél az alkatrészek halmaza és a működő egész óraszerkezet között nincs akkora minőségi különbség, mint az olyan komplex rendszereknél, mint egy élő organizmus. Az óraszerkezet komplikált, de nem komplex, mint az élő organizmus. Az átmenet a komplikált és komplex között azonban egyáltalán nem éles. A komplikáltnak is különböző fokozatai vannak.

A komplikáltság skálájának (ha van ilyen) elejére talán jó példa az íj és a nyílvessző. Íj és nyílvessző ember alkotta szerszám, nem létezik a természetben. Az 1.2 színes ábra (https://en.wiki.org/wiki/Bow_and_arrow, CC BY-SA 2.0, szerző Rod Waddington) egy karo (Kelet-Afrikában élő nép) fiút mutat íjával és nyilával. Az íj és nyíl az őskorban jelent meg

1.2. színes ábra



1.3. színes ábra

mint a vadászat leghatékonyabb eszköze. Egy gyermek is képes egy hajlékony, de erős vesszőből és egy erős, nem nyúló zsinegből, valamint egy erősebb és kevésbé hajlékony vesszőből egyszerű lövő szerszámot készíteni. Ha külön tekintjük a két vesszőt és külön a zsineget, akkor e három alkatrészben nincs benne semmilyen formában a belőlük készíthető lövő eszköz viselkedése. Ha soha nem hallottunk volna az íjról, fogalmunk sem lenne, mire képes ez a három részt ügyesen kombinálva kialakított szerkezet.

A komplikáltság skálájának a komplexitás felé eső részébe sok modern, bonyolult gépi szerkezetet lehetne sorolni. De inkább maradjunk a mechanikai óraszerkezeteknél, és nézzünk egy nagyon érdekes történelmi példát! A szépséges Franeker (frízül: Frjentsjer) Hollandiában a tizenegy fríz város egyike. Érdekes magyar vonatkozása is van: 1623 és 1793 között 1200 magyar diák tanult a franekeri egyetemen. A város nevezetessége a Koninklijk Eise Eisinga Planetarium [1.7.]. Ez a planetárium szerepel a top 100 holland örökség és az UNESCO holland műemlékek listáján [1.8.]. 2011-ben lett az UNESCO világörökségi listájának jelöltje. A planetáriumot Eise Eisinga (1744–1828) fríz gyapjúgerebenező és autodidakta matematikus-csillagász építette. Ez egy önműködő mechanikus ingaóra-szerkezet, amely nagy pontossággal modellezi a Naprendszer bolygóinak mozgásait. A lépték 1 mm : 1 millió km. Ez a világon a legrégebbi máig működő planetárium. A szerkezet egy részlete az 1.3 színes ábrán látható (https://en.wikipedia.org/wiki/Eise_Eisinga_Planetarium, CC BY-SA 3.0, rijksmonument No 15668, szerző: Vera de Kok).

A Naprendszer bolygóinak mozgása felettébb bonyolult. Az alkotóelemek halmazából nyilvánvalóan lehetetlen lenne megérteni az összeépített egész működését.

Shannon-entrópia

A komplexitás megértésében fontos szerepet játszik a jelsorozatokban tárolt információtartalom meghatározása. Az információtárolás és -továbbítás óriási mértékben fejlődött a 20. században. Claude Elwood Shannon (1916–2001) amerikai mérnök-matematikust tekintik az információelmélet megalapítójának. Alapvető az 1948-ban írt munkája [1.9.]. Az információelméletben kulcsszerepet játszik az entrópia. Nagyon sokféle tudományterület alkalmazza ezt a fogalmat. Általában a rendezetlenség, véletlen vagy bizonytalanság mértékére vonatkozik.

Érdekes a szó eredete. 1865-ben Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822–1888) német fizikus és matematikus, a termodinamika egyik megalapítója alkotta meg mint az energia szó társszavát, mivel hasonló fontosságot tulajdonított e fogalomnak. Az *energia* szóban az *en*- görög előtagot (-ban, -ben) és az ugyancsak görög *ergon*t (ἔϱγον = munka) fedezhetjük fel. Clausius az *ergon*t a *tropé*val (τϱοπή = átalakítás) helyettesítette, így kapta az *entrópia* szót.

Mi az entrópia az információelméletben? Tekintsünk egy karakterhalmazt (például a tízes számrendszer tíz számjegyét, vagy a latin ábécé betűit), nevezzük ezt a kiválasztott jelhalmazt általánosan ábécének, és a karaktereket betűknek! Ezekből alkossunk egy jelsorozatot vagy más néven szöveget! Legyen p(x) az x betű (x ennek az ábécének bármelyik tagja lehet) relatív gyakorisága! A betű relatív gyakorisága az adott szövegben való előfordulásának száma osztva a szöveg hosszával. Nézzünk egy példát! Az ábécé tagjai a tíz decimális számjegy (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9) és a jelsor: 21387655670113487671. Ez összesen 20 betű. A 0 egyszer fordul itt elő, tehát a 0 relatív gyakorisága 1/20 = 0,05. Másképpen p(0) = 0,05. Hasonlóképpen az összes betű relatív gyakorisága:

p(0) = 0,05
p(1) = 0,2
p(2) = 0,05
p(3) = 0,1
p(4) = 0,05
p(5) = 0,1
p(6) = 0,15
p(7) = 0,2
p(8) = 0,1
p(9) = 0

A relatív gyakoriságok összege mindig 1. Ellenőrizhetjük, hogy ez ebben a példában is teljesül-e. Az információelméleti definíció úgy szól, hogy minden egyes valószínűséget meg kell szorozni annak logaritmusával, és negatív előjellel venni. (Választunk egy logaritmusalapot, és mindig ugyanazt használjuk. Vegyük a 10 alapú logaritmust!) Ezután az így kapott szorzatokat összeadjuk. (A 0 logaritmusa mínusz végtelen, de ekkor 0 × log(0)-t 0-nak vesszük.) Vagyis ebben az esetben a fenti jelsorozat H-val jelölt entrópiája:

$$\sum_{i=0}^{9} -p(i)\lg(p(i))$$

Az egyes tagok kiszámítása:

–p(0)lg(p(0)) ≈ 0,065055149980

–p(1)lg(p(1)) ≈ 0,1397940009

–p(2)lg(p(2)) ≈ 0,065055149980

–p(3)lg(p(3)) = 0,1

–p(4)lg(p(4)) ≈ 0,065055149980

–p(5)lg(p(5)) = 0,1

–p(6)lg(p(6)) ≈ 0,1235863111

–p(7)lg(p(7)) ≈ 0,1397940009

–p(8)lg(p(8)) = 0,1

–p(9)lg(p(9)) = 0

Ezeket összeadva az eredmény H = 0,8983288122.

Most egy olyan, ugyancsak 20 betűből álló jelsorozatot veszünk ugyanebből az ábécéből, amelyben minden betű kétszer fordul elő. Vagyis minden betű relatív gyakorisága 0,1. Akkor –0,1 × lg(0,1) = 0,1; és ez 10-szer fordul elő. Az összeg éppen 1, tehát H = 1.

Vegyünk egy még egyszerűbb példát! A jelsorozat húsz darab 2-t tartalmaz. Tehát p(2) = 1. Minden más betű relatív gyakorisága 0. Mivel –1 × lg(1) = 0 és –0 × lg(0) = 0, így tíz nullát kell összeadni, az eredmény 0.

Hogyan kell ezeket és az ehhez hasonló eredményeket értékelni? Az entrópia mindig akkor a legnagyobb, ha az adott jelsorozatban a betűk relatív gyakorisága megegyezik. Amennyiben nagy a jelsorozat hossza a betűk számához képest, akkor ez a szituáció bekövetkezik abban az esetben, ha a betűk eloszlása véletlen vagy véletlenszerű.

Az entrópia annál kisebb, minél egyenlőtlenebb az eloszlás. Az egyenlőtlen eloszlás azt jelenti, hogy vannak kitüntetett betűk, amelyek gyakoribbak a többieknél. Az egyenlőtlenség mögött mindig valamilyen szabályosság van, szemben a véletlennel.

A legegyenlőtlenebb eloszlás az, amelyiknél csak egyetlen betű szerepel a jelsorozatban. Ez a legnagyobb mértékű szabályosság.

Minél nagyobb a szabályosság, annál kisebb a jelsorozat információtartalma. Ez rendkívül elvontnak tűnik. Pedig, ha belegondolunk, ezt mi nagyon jól tudjuk minden matematika nélkül is, csak éppen nem látjuk a kapcsolatot az egyszerű hétköznapi tapasztalat és az elvont, nehéz matematika között. Hát nézzük meg, mi ez a kapcsolat!

Milyen a szószátyár, bőbeszédű, locsogó ember beszéde? Sok beszédnek sok az alja. Száz szónak is egy a vége. Amelyik tyúk sokat kárál, keveset tojik. Vagyis kevés az információ a hetet-havat összehordó ember beszédében ahhoz képest, hogy mennyit beszél. Nem az elmondottak tartalmi hossza a baj, hanem az, hogy a gondolatot körülményesen mondja, vagy felesleges, esetleg értelmetlen kifejezésekkel tölti teli a mondatait. Ha azt halljuk, hogy „Jaj, Istenem!”, ebből tudjuk, hogy valami baj vagy nagyon meglepő szituáció van. De mennyivel fogunk többet tudni, ha ugyanezt tízszer elismételve jajong valaki? Semmivel, hiszen ugyanazt ismételgeti. Sem a bő beszéd, sem a felesleges ismételgetés nem növeli az információtartalmat.

Aki tömören fejezi ki magát, az minden szóval, mondattal új információt közöl. Ha csak egyetlen mondatot nem értünk, pótolhatatlan információt vesztünk. A szavaknak súlya legyen, ne száma. Lám, Occam borotvája milyen szoros kapcsolatban van az információelméleti entrópiával!

Kolmogorov-komplexitás

Az entrópia nagyon közeli rokona a *Kolmogorov-komplexitás* is. Ezt a fogalmat több névvel is illetik. Például Solomonoff–Kolmogorov–Chaitin-komplexitás, a három tudós nevéről elnevezve, akik 1964-ben, 1965-ben, illetve 1966-ban részint egymástól függetlenül kidolgozták az elméletet [1.10.], [1.11.], [1.12.].

Ray Solomonoff (1926–2009) orosz zsidó emigráns szülők gyermeke, amerikai matematikus. Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903–1987) szovjet matematikus. Gregory John Chaitin (1947–), argentin–amerikai matematikus és informatikus.

Most a jelsorozatnak nem az információtartalmát, hanem a bonyolultságát, komplexitását mérjük. Éppen ebben rejlik a Kolmogorov-komplexitás óriási jelentősége, hogy egy objektív eszközt kínál a bonyolultság mérésére. Nagyon speciálisnak tűnik, hiszen csak jelsorozatokra vonatkozik. Látni fogjuk azonban, hogy milyen egyszerűen lehet a legkülönbözőbb rendszereket jelsorozattá alakítani. Ezért ez a tudományos eredmény sokkal általánosabb eszköz, mint első pillanatban gondolnánk.

A szoros kapcsolat a Shannon-entrópia és a Kolmogorov-komplexitás között ott van, hogy a Kolmogorov-komplexitás szerint a legkomplexebb a véletlen jelsorozat. Shannon szerint a véletlen jelsorozatnak a legnagyobb az entrópiája, ez a legrendezetlenebb, ugyanakkor a legmagasabb az információtartalma. Annál kevésbé komplex a jelsorozat, minél szabályosabb. Az ilyen rendezett jelsorozatnak kicsi vagy éppen nulla az információtartalma, vagyis kicsi vagy nulla az entrópiája.

Nagyon vázlatosan és elnagyoltan: egy jelsorozat komplexitása annak a szövegnek a hossza, amellyel egyértelműen leírjuk a jelsorozatot. Legyen a jelsorozat pl. tízezer „a” betű egymásutánja! Tehát ez egy tízezer betű hosszúságú jelsorozat. Az a szöveg, hogy „tízezer *a* betű egymásutánja”, 27 karaktert tartalmaz a szóközöket is beleértve. A 10 000-rel szemben áll a 27, amely lényegesen rövidebb a tízezernél. Tehát ez egy roppant egyszerű szöveg. Ha tízezer véletlenül választott betűből áll a szövegünk, akkor nem tudjuk ezt a szöveget egyszerűbben leírni, mint hogy ismét felsoroljuk mind a tízezer betűt. Ez a lehetséges legbonyolultabb eset.

Nézzük ezt a közmondást: „Ki korán kel, aranyat lel.” Ez 26 karaktert tartalmaz: betűk, szóközök és a vessző, valamint pont. Minden magyar anyanyelvű ismeri ezt a szellemes mondást. „Közmondás korai kelésről.” Ez 24 karakter. Sikerült valamivel rövidebben leírni, mint a 26 karakter. Van-e még rövidebb leírás?

Talán van: „Ki korán kel…”. Minden magyar tudja a folytatást, és csak 15 karakter. Ha angol anyanyelvűnek szeretnénk leírni ezt a jelsorozatot, az angol leírás hosszabb lenne, mint 15 karakter. Ezért egyszerűbb ismét leírni az egészet, vagyis a saját 26 karakterével megadni. Vigyázzunk, itt a „szöveg” vagy jelsorozat egy formális objektum. A benne megbúvó jelentéstől eltekinthetünk. Tehát az elképzelt angol barátunknak a leíráskor természetesen nem kell megmagyaráznunk, hogy ez egy magyar közmondás, és hogy mit jelent, mert ez esetben a jelentés nem játszik szerepet.

Ezek a kis példák egyben rávilágítanak ennek a rendkívül hasznos mérőeszköznek, a Kolmogorov-komplexitásnak a nehézségére is. Definiálnunk kell, hogy a jelsorozat leírását milyen eszközzel, milyen keretek között engedjük meg. Továbbá: hogyan győződhetünk meg arról, hogy megtaláltuk az adott keretek közötti legrövidebb leírást?

A véletlen jelsorozatot semmilyen keretek között, semmilyen módszerrel nem tudjuk rövidebben leírni, mint magát a jelsorozatot. Ezt a tényt szem előtt tartva hogyan értelmezzük egy leírás hosszának (legyen ez h) az általa létrehozott jelsorozat hosszához (legyen ez H) való viszonyát? Vagyis a h/H arányt?

A leíró jelsorozat Kolmogorov-komplexitása definíció szerint h, függetlenül H-tól. Minél rövidebb a leírás, annál egyszerűbb az adott jelsorozat, minél hosszabb, annál komplexebb. A komplexitás ilyen megadásánál mégsem függetleníthetjük magunkat H-tól. Hiszen ha h nem kisebb, mint H, akkor az adott jelsorozat véletlen, tehát a lehető legkomplexebb. Ezzel szemben ha $h < H$, akkor nem véletlen a jelsorozatunk, hanem valamiféle szabályosság rejtőzik benne. Nyilvánvaló, hogy minél kisebb a h/H arány, a jelsorozat annál messzebb van a véletlentől, annál szabályosabb, és ez a szabályosság annál kevésbé „rejtett”, annál könnyebb észrevenni. Ezért tudomásul véve, hogy egy H hosszúságú jelsorozat komplexitása egyenlő az azt létrehozó, lehető legrövidebb leírás h hosszával, függetlenül H-tól, a h/H arány sem lehet közömbös. Ez az arány is fontos információt hordoz. Megmutatja, hogy mennyire járunk közel a véletlenhez, vagy éppen mennyire vagyunk távol attól. Mivel a véletlen ellentéte a szabályos, valamely mintázatot magába foglaló, így a h/H egyben arra is utal, hogy mennyire szabályos a jelsorozat, illetve mennyire jellemző mintázatot hordoz.

Ennek a h/H aránynak van még egy másik értelmezése is. A jelsorozat leírása minden esetben olyan, hogy egyértelműen állítja elő ezt a jelsorozatot. Tehát ha csak a leírást tároljuk, magát a jelsorozatot nem, akkor sem veszítünk semmit, hiszen a leírással bármikor reprodukálhatjuk a jelsorozatot. Ha $h < H$, akkor ennek az az előnye is megvan, hogy a leírás kisebb helyigényű, mint maga a jelsorozat. Ezért a leírást a jelsorozat *tömörítés*ének is tekinthetjük. Erről később részletesen beszélünk. De annyi már most világos, hogy a h/H arány a tömörítés mértékét is megadja. A véletlen jelsorozat nem tömöríthető. Minél egyszerűbb a jelsorozat, minél kifejezettebb a benne található mintázat, szabályosság, annál nagyobb mértékben tömöríthető.

Káoszelmélet

A fentiek értelmében a véletlen szoros kapcsolatban áll a komplexitással. Az a tapasztalat, hogy a káosz is szoros kapcsolatban van a komplexitással. A káosz determinisztikus, nem véletlen, de véletlenszerű. Vagyis úgy viselkedik, mintha véletlen lenne. A komplex rendszerekben igen gyakran előfordul a kaotikus viselkedés. Ugyanakkor van egy roppant érdekes tény. Nagyon sok nagyon egyszerű rendszer is kaotikusan viselkedik. Ezek az egyszerű rendszerek vajon csak komplikáltak és nem komplexek? Erre a kérdésre még visszatérünk az 5. fejezetben.

A káoszelmélet gyökerei a 19. század végére nyúlnak vissza. Az 1880-as években Henri Poincaré (1854–1912) francia matematikus és fizikus a *három test problémá*t tanulmányozta (lásd később), és olyan pályát fedezett fel, amely mai szóhasználattal kaotikus. 1898-ban Jacques Hadamard (1865–1963) francia matematikus publikált egy fontos munkát ugyancsak olyan mozgásról, amelyet ma kaotikusnak nevezünk.

Az 1960-as évek elejétől különböző tudományok tudósai olyan különös viselkedéseket fedeztek fel komplex rendszerekben, amelyek kiszámíthatatlannak, előre jelezhetetlennek tűntek. Például a földi atmoszférában vagy az emberi agyban. E tudósok közé tartozott Edward Norton Lorenz (1917–2008) amerikai matematikus és meteorológus, aki az időjárás kaotikus jellegét figyelte meg. 1963-ban publikált cikkével megalapozta a káoszelméletet [1.13.]. 1976-ban Robert May (1936–2020) ausztrál matematikus egy fontos cikket írt *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics* (Egyszerű matematikai modellek nagyon komplikált dinamikával, lásd később is) címmel [2.11.]. Az 1980-as évek közepétől már intézményesen is foglalkoztak nemlineáris rendszerekkel (ezekben várható a káosz fellépése) és a káosszal kapcsolatos olyan jelenségekkel, mint a fraktálok, bifurkációk, különös attraktor, komplex rendszerek.

Különös a *káosz* szó eredete és használata. Ógörög eredetű szó, χάος. Jelentése űr, üresség. Évezredek alatt változott a jelentése. A 17. századtól kezdték összevisszaság, zűrzavar, rendetlenség, rendezetlenség értelemben használni. A matematikai alkalmazását Tien-Yien Li (1945–2020) kínai születésű amerikai matematikus és James A. Yorke (1941–) amerikai matematikus és fizikus vezette be 1975-ben [1.14.]. Olyan matematikai és fizikai jelenségekre vonatkoztatták, amelyek determinisztikusak ugyan, mégis kiszámíthatatlanok a gyakorlatban elkerülhetetlen mérési pontatlanságok következtében. A kiszámíthatatlanság miatt tűnik úgy, mintha a kaotikus rendszer véletlen működésű lenne.

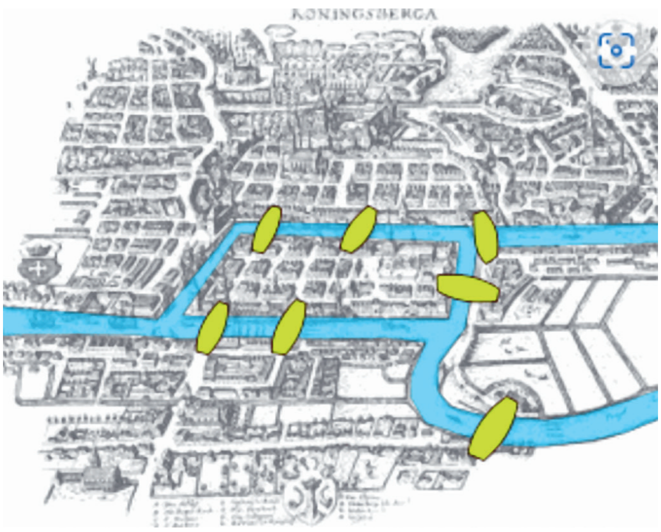
A káosz nem fér bele a redukcionista, determinista szemléletbe. Nem véletlen, hogy a káosz felfedezése, és egyre mélyebb tanulmányozása is motiválta a komplex rendszerek vizsgálatát. A káosz megismerésével a determinizmus, a rend is új megvilágításba került. Úgy tűnhet, hogy a rend, azaz a kiszámíthatóság ellentéte a véletlen és a káosz, és a rend kizárja a véletlent. De mégis, van-e közük egymáshoz, van-e kapcsolatuk? Annyira van, hogy szinte kéz a kézben járnak, csaknem elválaszthatatlanok. Ilyen ez a mi univerzumunk. A véletlenből *a nagy számok törvénye* rendet teremt. A rendből káosz teremtődhet, és a káoszból rend. Az ilyen szituációkra szép és könnyen átlátható példákat mutat Philip J. Davis (1923–2018) és Reuben Hersh (1927–2020) amerikai matematikus a *The Mathematical Experience* című 1981-ben megjelent művükben (magyarul megjelent 1984-ben [1.15.]).

Behálózva

Barabási Albert-László (1967–) magyar (jelenleg amerikai állampolgár) fizikus könyve, *Linked* 2002-ben jelent meg (teljes címe: *Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means for Business, Science, and Everyday Life,* magyarul: Összekapcsolva: Hogyan van minden mindennel összekötve, és ez mit jelent az üzleti világ, a tudomány és a mindennapi élet számára). Ez a nagy sikerű és úttörő jelentőségű könyv magyar nyelven 2013-ban jelent meg a szellemes *Behálózva* címmel. A téma egy új tudomány, a *hálózatelmélet.*

Königsberg egy porosz város volt, ma az orosz Kalinyingrád. A várost kettészeli a Pregolja (németül Pregel) folyó. A belvárosban a folyó egy fél kilométer hosszúságú szigetet ölel körbe (a sziget német neve: Kneiphof), majd rögtön kettéágazik, hogy hosszan megmaradjon ez a két ág (Lomse sziget). A kora 18. században hét híd biztosította a folyótól északra és délre fekvő városrészek kapcsolatát a sziget közvetlen környezetében. A második világháború bombázásai következtében ma már a hétből csak öt híd van meg.

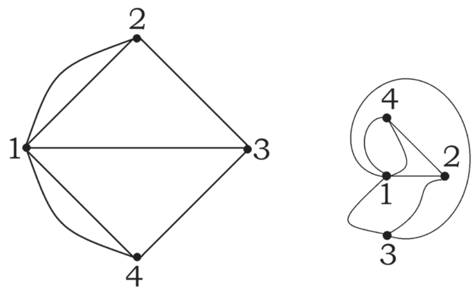
A folklór szerint a hét híd érdekes elhelyezkedése azt a különös rejtvényt adta fel, hogy létezik-e egy olyan folytonos út, amely minden hídon áthalad, de csak egyszer. Ez a híres *königsbergi hidak problémája* névvel vonult be a tudománytörténetbe. A korabeli térképrészletet a hét híd sematikus feltüntetésével az 1.4. színes ábra mutatja (https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg, CC BY-SA 3.0, szerző: Bogdan Giuşcă).



1.4. színes ábra

LEONHARD EULER (1707–1783) a nagy svájci fizikus és matematikus 1736-ban matematikai precizitással megoldotta ezt a feladatot, az eredményt publikálta, és ezzel egy új tudományág, a gráfelmélet alapjait fektette le. A *gráf* elnevezés azonban csak 150 évvel később bukkant fel JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814–1897) brit matematikusnak a *Nature*-ben 1878-ban írt cikkében [1.16.]. A görög *grafó* (γράφω) jelentése írni, a latin *graphicus* jelentése képi. A *graph* az angol *graphic formula* (= grafikus képlet) rövidítése.

A gráf egy matematikai struktúra, amely úgynevezett csúcsokból (pontokból) és bizonyos pontokat összekötő élekből (vonalakból) áll. A csúcsok helye és egymástól mért távolsága érdektelen. A vonalak lehetnek egyenesek vagy görbék. Annyi fontos, hogy megkülönböztessük a csúcsokat, és tudjuk, hogy mely csúcsok között van összeköttetés, és melyek között nincs. Az élek indulhatnak és érkezhetnek ugyanabba a csúcsba is. Két csúcs között több él is futhat.



1.1. ábra

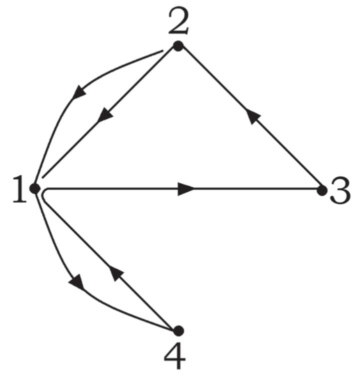
Mi köze a königsbergi hidaknak a gráfokhoz? Az, hogy a hét königsbergi híd a feladat szempontjából egy gráffal helyettesíthető. A városnak a folyó által elválasztott két része egy-egy csúcs. Továbbá a két sziget is egy-egy csúcs. Élek ott vannak, ahol a csúcsok között átjárás van. Annyi élet rajzolunk, ahányféle az átjárás. Az átjárást éppen a hidak teszik lehetővé, tehát hét él lesz a négy csúcs között, lásd az 1.1. ábra bal felét.

A csúcsokat beszámoztuk, hogy megkülönböztethetőek legyenek. Az 1 jelű csúcs a kisebb, a 3 jelű pedig a nagyobb sziget. A város északi része a 2 jelű csúcs, a déli pedig a 4 jelű.

A csúcsok és az élek geometriai elhelyezkedései, tulajdonságai teljesen közömbösek. Az 1.1. ábra jobb felének rajza pontosan ugyanazt a gráfot reprezentálja, mint a bal fél. Matematikailag érdektelen hogyan rajzolunk fel egy adott gráfot. A csúcsok beszámozása vagy másképpen történő megjelölése is érdektelen. Csupán a szemléletesség és a jól átláthatóság játszik szerepet. Éppen ez Euler egyik nagy érdeme: kiküszöbölte a lényegtelent, a geometriát, és csak azt tartotta meg, ami lényeges (Occam borotvája!). A gráfelmélet a topológia része. A topológia az objektumoknak olyan tulajdonságait keresi, amelyek függetlenek a geometriától, és megmaradnak mindenféle deformáció után is. Például egy gumikarika topológiailag ugyanaz marad, akárhogy nyújtjuk vagy csavarjuk. Ellenben ha felvágjuk, más topológiai testté alakul.

Egy tömör golyó és egy tömör kocka nem különbözik topológiailag. Ha ezek gyurmából lennének, akkor szakítás, vágás nélkül egyik a másikká alakítható lenne.

Térjünk vissza a mi konkrét gráfunkhoz, és használjuk az 1.1. ábra bal felének rajzát és számozását! A feladat erre a gráfra átfogalmazva tehát az, hogy minden élen pontosan egyszer menjünk végig. Egy-egy csúcson akárhányszor áthaladhatunk, de az éleken csak egyszer. Példaképpen nézzünk egy bejárást csúcstól csúcsig: 2141321. Ez nem sikerült, mert a hatodik lépés után a 1 jelű csúcsba jutottunk, és innen már nem mehetünk tovább ismétlés nélkül. Így a 3-4 út kimaradt. Csak 6 hosszúságú ez az út, lásd az 1.2. ábrát. Nem is érdemes tovább keresgélni. Euler bebizonyította, hogy a feladatnak nincs is megoldása. Tehát nincs 7 hosszúságú út.



1.2. ábra

Euler egy rendkívül egyszerű módszert talált, amellyel tetszőleges számú csúcsot és élet tartalmazó gráfról igen könnyen eldönthető, hogy létezik-e teljes út, vagyis minden élen pontosan egyszer áthaladó út. Csak azt kell megnézni, hogy minden csúcshoz páros számú él tartozik-e, esetleg két csúcs kivételével, amelybe páratlan számú él csatlakozik. A magyarázat is egyszerű. Ennek alapja az, hogy ha egy csúcsba befutottunk, azt el is kell hagyni. Többször is befuthatunk, de pontosan annyiszor ki is lépünk. Emiatt az kell, hogy páros számú legyen az egy-egy csúcshoz tartozó élek száma. Kivételt képez az indulási és az érkezési csúcs, ha ezek különbözőek. Ugyanis ebben az esetben ezekhez, de csak ezekhez páratlan számú élnek kell csatlakozni. A königsbergi hidak feladata azért megoldhatatlan, mert itt minden csúcshoz páratlan él csatlakozik.

Nagyon piciny ez a gráf. Csak négy csúccsal és hét éllel írható le. Az ember azt gondolná, nincs ebben semmi nehézség. Minden lehetséges utat felírunk, és megnézzük, létezik-e 7 hosszúságú, vagy sem. Miért kellett a megoldáshoz egy matematikai zseni? Ezt a kérdést nagyon is érdemes megvizsgálni, mert ráébredünk, hogy bizony nem is olyan egyszerű ez a kis gráf. Ezáltal azt is könnyen el tudjuk képzelni, hogy mennyire bonyolult lehet egy olyan gráf vagy más szóval *hálózat,* amelynek nem négy, hanem 10 vagy 100, vagy esetleg több ezer, netán sok-sok millió csúcsa van, amelyek között szövevényes élkapcsolódások léteznek. Megérthetjük, hogy a nagy hálózatok igazán megérdemlik a komplex rendszer elnevezést. Ilyen terebélyes hálózatok fordulnak elő a fizikában, a biológiában, az ökológiában, a gazdaságban, a szociológiában és az idegtudományban. Hatalmas hálózat az internet és a világháló. A példákat tovább lehetne sorolni.

Most pedig vizsgáljuk meg, hogyan határozhatók meg az éleken áthaladó, ismétlések nélküli utak ennél a mi szerény 4 csúcsú 7 élű hálózatocskánknál! A fent tárgyalt 2141321 út mellett egy másik lehetséges példa a 3212. Figyeljük meg, hogy ez három élen halad keresztül (az út hossza tehát 3), és nem folytatható ismétlés nélkül.

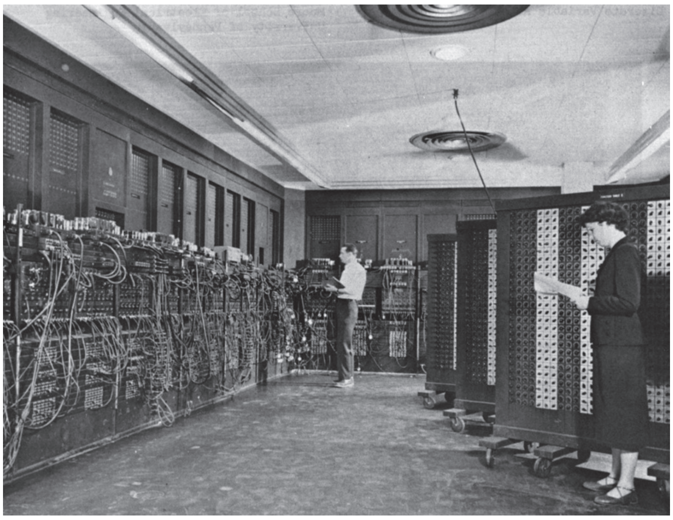
Képzeljük el, hogy Euler bizonyítása előtti időben vagyunk! Szeretnénk megtalálni a feladatban kitűzött utat. Mi lenne, ha az 1, 2, 3 és 4 számokból nyolcas sorozatokat készítenénk? Mindegyik ilyen sorozat a 7 hosszúságú út egy jelöltje. Az ilyen sorozatok képzése egy tipikus kombinatorikai feladat, a neve variáció. 4^8 számú különböző nyolcas sorozat létezik. Ez a szám pontosan 65 536. Elképesztően nagy ahhoz, hogy valamennyit ellenőrizzük, vajon a 7 hosszúságú út leírása-e, vagy sem. Természetesen ezekben a nyolcas sorozatokból eleve ki kell zárni azokat, ahol egymás után ugyanaz a szám fordul elő. Például ilyen a 43211231. Hiszen az 1 jelű csúcsból az 1 jelű csúcsba menő út nem vezet át élen. Hogy az ilyen eseteket valóban elkerüljük, a legelején 4 szám közül választhatunk, de minden következőnél csak három közül. Tehát a 65 536 helyett most „csak” 4 × 3^7 = 8748 féle szám nyolcast kell átvizsgálni. Hát még ez is reménytelen feladat a 18. században. Mit tegyünk? Azokat a sorozatokat is kiszűrhetjük, ahol 2 után 4 jön, vagy 4 után 2. Hiszen a 4 és 2 jelű csúcsok között nincs él. Tehát ahol 2 áll, ott 4 nem lehet a következő szám, vagy fordítva. Hány szám nyolcas marad így? Ezt kiszámolni már sokkal nehezebb kombinatorikai feladat. Mert lehet, hogy e számok nem is szerepelnek egy sorozatban, de az is lehet, hogy többször szerepelnek. Ha biztosan szerepelne a 2 is, és a 4 is, és mindkettő csak egyszer, akkor már csak $4 \times 2^2 \times 3^5 = 3888$ darab átvizsgálandó sorozatunk maradna. Ez is irdatlanul sok. Néhány további ügyes ötlettel tovább csökkenthető a vizsgálandó utak száma. Ha azonban ezzel az egyszerű gráffal ellentétben a gráf mérete nőne, akkor semmilyen ügyes ötlet nem lenne képes megfelelően csökkenteni a lehetséges utak számát, lásd kicsit lejjebb.

Számítógépek

Láttuk, hogy a königsbergi hidak problémája kis méretű gráffal, illetve hálózattal leírható. A kis méretű gráfokban sok számítás kézzel elvégezhető. Ahogy azonban a gráf mérete növekszik, a kézi számítások egyre nehezebbekké vagy éppen lehetetlenné válnak.

A számítógépek megjelenése és teljesítőképességük növekedése szorosan összefügg a komplex rendszerek vizsgálatával. Annyira összefügg, hogy a komputerek nélkülözhetetlenek a komplex problémák tanulmányozásához. Az imént tárgyalt kis hálózat remek példa, hogy megértsük ezt a nélkülözhetetlen szerepet. Nézzük csak meg, hogy ha egy icipicit nagyobb hálózatot vizsgálnánk, akkor hogyan növekedne a lehetséges utak száma. Legyen csak 5 csúcs a 4 helyett, és 8 él a hét helyett. Akkor $5 \times 4^8 = 327\,680$ út leíró számsorunk lenne. 6 csúcs és 9 él esetében: $6 \times 5^9 = 11\,718\,750$, közel tizenkétmillió út. Kismértékben növekszik a csúcsok és az élek száma, ugyanakkor elképesztő ütemben növekszik a lehetséges utak száma. El tudjuk képzelni egy sokmillió csúcsot tartalmazó hálózat mennyiségi viszonyait?

Ha tovább növekszik az igény arra, hogy egyre nagyobb és nagyobb hálózatot vizsgáljunk, vajon a számítógépek lépést tartanak-e ezzel az igénnyel? Nagyon röviden tekintsük át a számítógépek fejlődését! Hogyan hasonlítható össze két számítógép? Milyen szempontok szerint? Az összevetés különösen nehéz, ha különböző korok gépeit hasonlítjuk össze. Hiszen ezek a gépek egészen más elemekből épülnek fel, és más elven is működnek. Éppen e nehézség kiküszöbölése érdekében találtak egy mérőszámot, amely ugyan messze nem tökéletes, mégis remek áttekintést enged. Ez a FLOPS, floating point operations per second, magyarul: másodpercenként elvégzett úgynevezett lebegő pontos műveletek száma. Az ENIAC a világon az egyik első programozható elektronikus, digitális számítógép volt. 1943-tól 1946-ig fejlesztették az amerikai hadsereg megrendelésére. 1955-ig volt üzemben, és ez alatt az idő alatt óriási hatása volt. Alaprajza 2,4 m × 30,5 m, és 30 tonnát nyomott. Egy részlet az 1.3. ábrán látható (U. S. Army photo). Sebessége hozzávetőleg 400 FLOPS volt (manapság egy okostelefon sebessége kb. 1 milliárd (10^9) FLOPS, két és fél milliószor nagyobb).



1.3. ábra

Hasonló teljesítményű volt e kor két másik számítógépe. Az egyik a Colossus, az a programozható elektronikus digitális számítógép, amelyet a brit kódfeltörők 1943 és 1945 között használtak (1.4. ábra). A másik a brit Bombe elektromechanikus számítógép, amelyet a híres Enigma titkosíró gép által kódolt náci üzenetek feltörésére használtak. A munkálatok egyik fontos szereplője Alan Mathison Turing (1912–1954) világhírű brit matematikus volt. E témára még visszatérünk.

A tudományos és műszaki célokra használatos nagy számítógépek FLOPS mértéke rohamosan növekedett: 1953: 10 000, vagyis 10^4 FLOPS. [2022 top500] adatai a legnagyobb sebességekre:

1993: 130 gigaFLOPS = $1{,}3 \times 10^{11}$ FLOPS,

2000: 12 288 gigaFLOPS = $1{,}2 \times 10^{13}$ FLOPS

2005: 367 teraFLOPS = $3{,}7 \times 10^{14}$ FLOPS

2010: 4700 teraFLOPS = $4{,}7 \times 10^{15}$ FLOPS

2015: 55 000 teraFLOPS = $5{,}5 \times 10^{16}$ FLOPS

2020: 537 petaFLOPS = $5{,}4 \times 10^{17}$ FLOPS

2022: 1686 petaFLOPS = $1{,}7 \times 10^{18}$ FLOPS

Tehát ötévente durván megtízszereződik a sebesség. Ilyen ütemű növekedés sehol máshol nem képzelhető el az ember alkotta világban. De még