Filep László

A tudományok királynője

A matematika fejlődése

Budapest, 1997

Tartalom

Bevezetés

A tankönyv matematika szakos tanárjelöltek és tanárok számára készült, de haszonnal forgathatják mindazok, akik érdeklődnek a matematika iránt és legalább középfokú végzettséggel rendelkeznek.

Megírásakor a szerző igyekezett hasznosítani *A matematika fejlődése* tárgy oktatása során szerzett tapasztalatait, valamint a tárgyhoz korábban írt két jegyzet (Szász, Szerényi) erényeit.

Ezek közül az utóbbi 1975-ben jelent meg és ez önmagában indokolttá teszi egy új tankönyv írását. Elég csak — a tárgy ideológikus jellegét is tekintve — a rendszerváltásra utalni. Ma már nem kötelező egyetlen filozófia szemléletének és terminológiájának használata sem. E téren igyekeztünk a sokszínűségre, a tények és filozófiai nézetek szétválasztására, általában a dezideologizálásra törekedni.

Az előző jegyzethez képest jobban igyekszünk szem előtt tartani azt, hogy használói nem csupán matematikusok, hanem leendő matematikatanárok. Tehát a száraz matematikai anyagot a kulturális és történeti háttér felvázolásával mutatjuk be és kitekintünk a módszertani vonatkozásokra is. Ez különösen a könyv első felére jellemző.

Reméljük sikerülni fog meggyőzni az olvasót arról, hogy a tárgy tanulása hasznos számára. A fontosabb matematikai fogalmak, módszerek történeti fejlődésének bemutatásával a tanár látni fogja, hogyan merült fel a fogalom bevezetésének szükségessége, mik okoztak nehézségeket a fejlődés során, milyen módszereket alkalmaztak a nehézségek leküzdésére, melyek az alkalmazási lehetőségek. A tanulságokat hasznosíthatja saját oktató munkájában.

A pusztán logikai tárgyalás, a történeti út tapasztalatainak figyelmen kívül hagyása lerövidítheti ugyan a tanítás idejét, de nem hatékony. Például a függvény tanításakor a legmodernebb „hozzárendeléses” függvényfogalmat akarjuk kialakítani a történeti fejlődés lépcsőfokainak kihagyásával. Ez a tisztán deduktív megközelítés sérti azt a genetikai elvet, amely szerint az egyedfejlődés nagy vonalakban követi a fajfejlődést. Vagyis az egyes ember ismereteinek fejlődése lerövidített, letisztított megismétlése az emberiség ismeretfejlődésének.

A történeti út figyelmen kívül hagyásának veszélyeire az új matematikai tantervekben, már 1962-ben memorandumban hívta fel a figyelmet hatvanöt neves amerikai matematikus (köztük Pólya György), úgy tűnik hiába. Nevelési szempontból is nagyon fontos lenne a történeti út színes, érdekes bemutatása.

Felhasználható a tárgy megszerettetésére, a motivációs bázis erősítésére, az órák élénkítésére. Így még a humán beállítottságú gyerek is találhat kötődést a matematikához. A nagy matematikusok életének bemutatása is komoly nevelő hatású. Végezetül: minden szaktanárnak illik ismerni szaktárgya történetét. Ez humán tárgyaknál már régen nem vitatott kérdés.

A könyv először történeti korszakokként tárgyalja a matematika fejlődését a modern matematika koráig. Külön fejezet szól a magyar matematikáról. Ebben a részben tárgyaljuk a matematika általános elvi kérdéseit és filozófiáját. A második részben a modern matematika legfontosabb fejezeteinek főbb fogalmait, eredményeit mutatjuk be, a századunk közepéig bezáróan. A kiválasztás szempontjai között a tanárképzés anyagához való kötődés, a magyar vonatkozású eredmények bemutatása és a szerző egyéni érdeklődése is szerepeltek. Az egyes fejezetek után gyakorlatokat, magyar nyelvű irodalmat, a könyv végén pedig életrajzi jegyzeteket és két függeléket találhatunk.

A tárgyalásmód igyekezett a legjobb kompromisszumot megtalálni az érthetőség és a pontosság között. Nem akart a részletekben elmerülni, hanem a meglévő ismeretekre épülő áttekintésre, szintetizálásra törekedett.

A könyv célja nem csupán egy vizsgára való felkészülés segítése. Ez annál is nehezebb, mert a tárgy helyzete változóban volt és van a tanárképzésben. A tárgyat tanító tanár ízlése szerint válogathat a tárgyalt anyagból, amely reményeink szerint tartalmazza egy matematikatanár számára legfontosabb ismeretanyagot, így a tanári továbbképzések kézikönyve is lehet.

A nem matematikus olvasó figyelmét bizonyára jobban lekötik a történeti érdekességek, a korszakok átfogó értékelései, az életrajzok. Nagy matematikusok nagy baklövéseinek és nagy vitáinak bemutatása szolgáljon nemcsak tanulságul, hanem vigasztalásul is számára.

A lektorok átfogó értékeléseikkel, hasznos útmutatásaikkal és a hibák gondos feltárásával nagymértékben hozzájárultak a könyv jobbátételéhez. A tipográfiai munkáért és a szép ábrákért *Kovács Zoltán* kollégámat illeti köszönet. A megmaradt hibákért nem őket, hanem egyedül a szerzőt terheli a felelősség.

Köszönetem fejezem ki a két kiadó munkatársainak, különösen *Votisky Zsuzsának*, a TYPOTEX ügyvezető igazgatójának, akinek bátorítása, szervező munkája nélkül e könyv nem készült volna el.

Nyíregyháza, 1997

Filep László

Állandó jelölések

Jel	*Jelentés*
$\vert H\vert$	H halmaz számossága
$P(H)$	H halmaz hatványhalmaza
$\in$	eleme
$\subseteq$	részhalmaz
$\subset$	valódi részhalmaz
$\cap$	metszet (közös rész)
$\cup$	unió (egyesítés)
$\setminus$	különbség
$\overline{H}$	H komplementere
$\times$	Descartes-szorzat
$R, \rho \subseteq H \times K$	H és K közötti (binér) reláció
$\varphi : H \to K$	H leképzése K-ba
$\wedge$	konjunkció (logikai és)
$\vee$	diszjunkció (logikai vagy)
$\rceil$	negáció (tagadás)
$\forall$	minden (univerzális kvantor)
$\exists$	van olyan (egszisztenciális kvantor)
$\exists!$	pontosan egy
$\Longrightarrow$	következik (implikáció)
$\Longleftrightarrow$	akkor és csak akkor (logikai ekvivalencia)
$\cong$	halmazok ekvivalenciája, struktúrák izomorfizmusa
$\mathbb{N}$	természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$	racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	valós számok halmaza
$\mathbb{C}$	komplex számok halmaza
$\mathbb{N}^+,\ \mathbb{Z}^+,\ \mathbb{Q}^+,\ \mathbb{R}^+$	az illető halmazok pozitív tartománya
$\mathbb{N}_0^+,\ \mathbb{Z}_0^+,\ \mathbb{Q}_0^+,\ \mathbb{R}_0^+$	az illető halmazok pozitív tartománya és a nulla

I. rész

A matematika történeti fejlődése

„… ha a tudomány valamelyik területét (vagy elméletét, vagy fogalmát) tanítjuk, akkor az emberpalántáknak nagy lépésekkel nyomon kell követniük az emberiség szellemi fejlődését."

(Pólya György, 1962)

1. fejezet

A matematika elvi kérdései

1.1. A matematika, mint tudomány és tantárgy

A matematika sajátos helyet foglal el a tudományok rendszerében. Nem sorolható sem a természet-, sem a társadalomtudományokhoz, hanem önálló kategória és ugyanakkor minden tudomány segédtudománya.

Régebben a természettudományokhoz sorolták, hiszen csak ott tudták alkalmazni. Ahogy GALILEI kifejezte: „A természet könyve a matematika nyelvén íródott." Később a matematikai módszerek más tudományokba is behatoltak, így GALILEI mondása ma már a társadalomra is kiterjeszthető. Nem túlzás azt sem állítani, hogy a matematika — elsősorban a számítógépek révén — bevonult nemcsak a tudománnyal foglalkozók, hanem az átlagember mindennapi életébe is. Ennek vetületeként a felsőoktatás minden ágában egyre inkább helyt kap a matematika. Ezen belül főleg a valószínűségi-statisztikai és számítógéptudományi alapismeretek, valamint a matematikai modellalkotás és optimumszámítás módszerei válnak egyre fontosabbakká. A matematikának ezt a fontos szerepét először az USA-ban ismerték fel 1957-ben az ún. szputnyik sokk után. Az első szovjet műhold fellövése meglepte, a tudományos és technikai fölénye tudatában lévő Amerikát. A lemaradás okait elemezve rájöttek, hogy elsősorban a matematika oktatását kell megújítani. Kialakult és világméretűvé vált egy oktatási reformmozgalom: az új matematika (new math). A legtöbb országban ma használatos tantervek és tankönyvek e mozgalom termékei, természetesen eltérő vonásokkal.

A matematikaoktatás reformja három forrásra támaszkodott. Szakmai oldalról a francia BOURBAKI csoport munkásságára, amely EUKLIDÉSZhez hasonlóan igyekezett megteremteni a mai matematika szintézisét halmazelméleti-logikai alapokon. Didaktikai oldalról PÓLYA GYÖRGY felfedezéses (heurisztikus) módszere és DIENES ZOLTÁN cselekedtetéses (manipulatív) eszközei voltak a meghatározóak. Ők is felhasználták módszereik kidolgozásában a harmadik forrást: PIAGET francia pszichológus eredményeit, aki megteremtette a matematikatanítás pszichológiáját. Az új matematika meghonosításában nagy szerepe volt VARGA TAMÁSnak, PELLER JÓZSEFnek, SZENDREI JÁNOSnak és másoknak.

Mivel az UNESCO által is elismerten mindenféle műveltség két alappillére az anyanyelvi és a matematikai műveltség, ezért a matematika oktatását ennek megfelelően kell(ene) az egész társadalomnak kezelnie.

1.2. A matematika sajátosságai

A matematikának más tudományoknál jobban jellemző, ezektől részben eltérő módszerbeli sajátosságai vannak. Ezek a következők:

Magasfokú absztrakció

Már a legegyszerűbb matematikai fogalmak is többszörös absztrakció eredményei. Ebben a vonatkozásban a filozófia hasonlítható leginkább a matematikához. Nem véletlenül oktatták sokáig a (tiszta) matematikát a filozófia részeként.

Az absztrakciónak két alaptípusát alkalmazza a matematika. Az általánosító absztrakció során konkrét dolgokból a közösen meglévő általános vonást ragadja ki. Így alakult ki például a „kettő" fogalma, mint a 2 ló, 2 alma, stb. konkrét dolgokban meglévő közös vonás, tudniillik az, hogy ugyanannyian vannak. Ilyenkor a dolgok más tulajdonságaitól eltekintünk. Matematikai nyelven szólva: amikor a gyerek kialakítja a „kettő" fogalmát, akkor elvonatkoztatja (absztrahálja) azt, ami ezekkel az egymással ekvivalens halmazokban közös, vagyis a számosságot. Ezért definiáljuk a természetes számokat halmazelméletileg úgy, mint a véges halmazok számosságait. A kettő, öt stb. számok fogalma tehát konkrét dolgokból alakult ki elsődleges általánosító absztrakcióval. Ezekből a fogalmakból másodlagos absztrakcióval adódik a természetes szám, majd újabb (többszörös) absztrakciókkal például a valós szám fogalma.

Az absztrakció másik fajtáját egyszerűsítő absztrakciónak nevezzük. Ez a fogalomalkotásnak az a módja, amikor eltekintünk az illető konkrét dolognak a valóságban meglévő bonyolultságától, csak egyszerűsített formáját vesszük figyelembe. Így alakult ki például az egyenes szakasz fogalma, a természetben meglévő egyenes tárgyak egyszerűsített formájaként. Az egyszerűsítő absztrakció újabb alkalmazásával kapjuk a pont, az egyenes és a sík fogalmaiból a lineáris altér fogalmát.

Az absztrakció mellett a matematikában alkalmazunk más fogalomalkotási eszközöket is. Gyakori az osztályozás különleges formájának, a specializálásnak használata. Így kapjuk a csoport fogalmából az Abel-csoport, az egyszerű csoport, a torzió csoport, stb. fogalmakat.

Deduktív jelleg

A matematikai állításokat deduktív úton kell bizonyítani, azaz már ismert tételekre logikailag visszavezetni. A kísérleti fizikában gyakori induktív bizonyítás viszont konkrét esetekben való kipróbálással igazol. A matematikában nem elégszünk meg azzal, hogy állításunkat minden konkrét esetre belátjuk.

Gondoljunk például egy természetes számokra vonatkozó állítás teljes indukciós bizonyítására. Az indukciós módszernek a matematikában csak a tételek megsejtésében van (fontos!) szerepe.

A matematikai bizonyítás két alaptípusát szokás megkülönböztetni.

1. Direkt bizonyítás. A kérdéses állítást logikailag visszavezeti ismert állításokra. Sémája: Az A állítás igaz, mert következik az igazaknak tekintett $B_1, B_2, \ldots, B_n$ állításokból.

2. Indirekt bizonyítás. A harmadik kizárásának elvén alapul. Felteszi, hogy a bizonyítandó A állítás *nem* A tagadása (nem ellenkezője!) igaz, és megmutatja, hogy ez a feltevés ellentmondásra vezet, vagyis *nem* A hamis állítás. Mivel egy állítás és tagadása közül pontosan egy igaz, ezért ha *nem* A hamis, akkor A igaz. Sémája: Az A állítás igaz, mert tagadása nem lehet igaz.

Az indirekt bizonyítást gyakran alkalmazzuk valami létezésének igazolására. Megmutatjuk, hogy a létezés tagadása ellentmondásra vezet, tehát az illető dolognak léteznie kell (*egzisztencia* bizonyítás). Ennél természetesen meggyőzőbb valami létezésének igazolására az illető dolog megkonstruálása (*konstruktív* bizonyítás). Indirekt úton szoktuk bizonyítani valami létezésének egyértelműségét (*unicitását*) is. Az indirekt bizonyítás során gyakran az állítás kontrapozícióját igazoljuk. Emlékeztetünk rá, hogy egy *ha* A*, akkor* B állítás logikailag egyenértékű kontrapozíciós formája: *ha nem* B*, akkor nem* A.

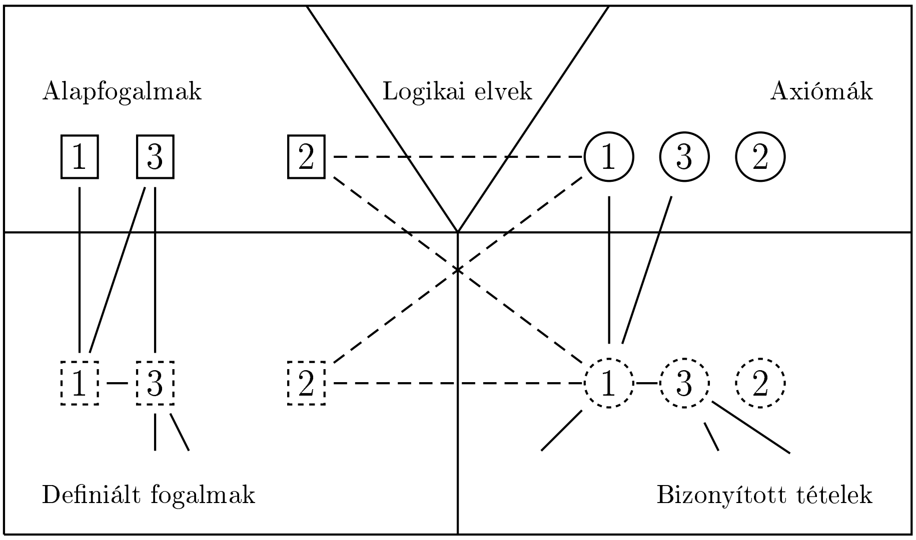
A bizonyítások egy másfajta osztályozása szerint egy bizonyítás lehet szintetikus, vagy analitikus. Az előző igaz tételekből kiindulva igazol, az utóbbi pedig az igaznak tekintett állítást visszavezeti igaz állításokra és hivatkozik a lépések megfordíthatóságára.

A matematika természetesen ismer bizonyíthatatlan állításokat is, vagyis olyanokat amelyeket nem lehet még egyszerűbb állításokra visszavezetni. Ezek az axiómák, vagy alaptételek, amelyeket bizonyítás nélkül elfogadunk. Az egyéb matematikai állítások (bizonyított tételek) mindig *ha-akkor* felépítésűek. Egy *akkor és csak akkor* állítás mindig két állításra bontható és külön-külön bizonyítandó. Egy matematikai állítás tehát azt tartalmazza, hogy ha ezek és ezek az állítások igazak, akkor a kérdéses állítás ezekből logikailag következik, tehát ennyiben igaz. Az axiómák igazságának kérdése nem matematikai, hanem filozófiai probléma.

A deduktív jelleg leginkább az axiomatikus módszerben mutatkozik meg, ami a modern matematika fő jellemzője. Egy matematikai tudományág axiomatikus felépítésének sematikus vázlatát a 1.1. ábra szemlélteti. A modern axiomatikában az alapfogalmaknak már nincs szemléletes jelentésük. Az axiómák szabta korlátok közt így egy axiómarendszernek többféle interpretációja lehet.

Sajátos szimbolika

A matematikai fogalmakat és tételeket betűk, logikai és egyéb jelek segítségével, formulák és képletek formájában fejezzük ki. A szimbolika fejlődése ma már ott tart, hogy elvileg lehetséges a szavak teljes kiküszöbölése a matematikából.



1.1. ábra. *Az axiomatikus felépítés sémája.*

A magasfokú absztrakció és fejlett szimbolika kölcsönösen feltételezik egymást. A megfelelő szimbolika hiánya gyakran akadályozta a fejlődést, egy szerencsés jelölés bevezetése pedig nagyban előmozdította. Más oldalról pedig: egy új fogalom kialakulása új jelölésekre támaszt igényt.

A mai fejlett szimbolika hosszú történeti fejlődés terméke. Kezdetben mindent szavakban fejeztek ki (retorikus matematika), majd szórövidítéseket kezdtek alkalmazni, amelyekből újabb és újabb jelek alakultak ki. Döntő lökést jelentett a halmazelméleti-logikai jelrendszer bevezetése e század elején, ami a matematika minden ágában elterjedt. Egy példa a retorikus és szimbolikus kifejezésmód különbözőségére:

Retorikus: Az A halmazt akkor nevezzük a B halmaz valódi részhalmazának, ha A minden eleme eleme B-nek is, de B-nek van olyan eleme, ami A-nak nem eleme.

Szimbolikus:

$$A \subset B := [(\forall x:\ x \in A \implies x \in B) \wedge (\exists x:\ x \notin A \wedge x \in B)]$$

Ez a nagyfokú szimbolizálás elkerülhetetlensége mellett káros is. Nehézzé teszi a kívülálló számára a matematika megértését. Nemcsak a matematikai tartalommal kell megbírkóznia, hanem az azt kódoló formanyelvvel is. Az oktatásban is kerülni kell a jelölések túlzott használatát, amire az oktatási reformok során volt tendencia.

A matematika egyre több részterületre bomlása azzal is járt, hogy minden egyes ág kifejlesztette saját szimbólumrendszerét, ami nagyon megnehezítette a matematikusok számára is egymás megértését. Már HILBERT tartott ettől, Neumann János pedig kereken bevallotta, hogy tizedét sem érti a matematikai konferencián elhangzott előadásoknak.

A matematikai szimbolika fejlődésében új vonás a számítástechnikai jelölésrendszer kialakulása (folyamatábra, gépi nyelvek, stb.) A számítógéptudomány önállósulása miatt, azonban nem biztos, hogy ezt a matematika fejlődéséhez fogja sorolni a jövő történetírása.

1.3. A matematika filozófiája

A matematikával kapcsolatos filozófiai problémák tárgyalása nem választható el a matematikától, annak történetétől. Ahogy Kant írta: A matematika története filozófiája nélkül vakká, filozófiája története nélkül süketté válik.

A filozófia azokra a kérdésekre igyekszik választ adni, hogy mi a matematika tárgya, mi a matematikai fogalmak eredete, mi biztosítja a matematikai állítások igazságát és alkalmazhatóságát, tehát egyszóval: mi a matematika? Századunkban ezek a kérdések új megvilágítást kaptak és visszahatottak a matematikára a halmazelméleti ellentmondások (*antinómiák*) kapcsán, amelyek a végtelen halmazoknál jelentkeztek. A matematikáról való filozofáláshoz (a metamatematikához) a nyersanyagot a matematika története biztosítja.

Századunkban a matematika filozófiájának három irányzata kristályosodott ki és vált uralkodóvá: az intuicionizmus, a logicizmus és a formalizmus. A magyar származású Lakatos Imre munkássága a tudományfilozófia új irányzatának kezdetét jelenti, ezen irányzatok tagadásaként. A marxizmus Engels múlt századbeli alaptételeinek korszerűsítésére és az idealista irányzatok kritikájára összpontosított, így elmaradt a fejlődés fő irányától. Engels szerint a matematika a valóságos világ mennyiségi viszonyainak és térbeli formáinak tudománya, ami egy naív materialista definíciónak elfogadható, de ma már túlhaladott. Kolmogorov szovjet matematikus ezt a valóságos világ mennyiségi és térbeli viszonyairól és formáiról szóló tudománnyá korszerűsítette, de ezt sem tudta megtölteni kellő konkrét és korszerű matematikai tartalommal.

Intuicionizmus (konstruktivizmus)

Az irányzat megalapozója a holland Brouwer, de gyökerei Kantig és még messzebb, Platónig nyúlnak vissza.

Platón szerint létezik a valóságos dolgok világa és az ideák világa. A matematika fogalmai a változatlan, tökéletes ideák világába tartoznak, szemben az esetleges és változó valóságos dolgok világával. Létezik például a derékszögű háromszög ideája (fogalma) és léteznek a konkrét derékszögű háromszögek, amelyek különböző mértékben hasonlítanak a derékszögű háromszög ideájára.

Az ideák megismerése nem az érzékelés, hanem az értelem dolga, amely szükségszerű és változatlan viszonyokat állapít meg az ideák között. Ilyenek a matematika tételei is. Ezek a valóságban annyira igazak, amennyire az illető dolgok hasonlítanak ideáikra. A Pitagorasz-tétel szükségszerűen igaz a derékszögű háromszögekre, mint ideákra, de csak közelítőleg és esetlegesen a konkrét derékszögű háromszögekre.

Platón gondolataihoz kapcsolódik Kant is, akinek ma is meghatározó szerepe van a matematika minden filozófiai irányzatában. Csak annyi a különbség, hogy van, aki hivatkozik rá és van, aki vitatkozik vele.

Kant szerint a matematikai fogalmak nem a tapasztalatból származnak (nem *a posteriori*ak), hanem a tapasztalatot megelőzően (*a priori*) keletkeztek belső belátással, azaz intuitív úton. Például a tér és idő fogalmai velünk született szemléleti formák. Segítségükkel a tudat a tárgyakat térben levőknek gondolja, és időben egymásután rendezi el.

Ez az elgondolás Kant ismeretelméletén alapszik, amely szerint a világ kettős természetű. Egyrészt van a jelenségvilág, amely érzékelés útján megismerhető, másrészt van a lényegvilág, amelyhez az érzékeléssel meg nem ismerhető úgynevezett magában való dolgok tartoznak. Ezeknek létezniük kell, hisz a jelenségek mögött lenni kell valaminek, különben „jelenség van, de nincs semmi, ami megjelenik." A matematika fogalmai is e lényegvilághoz tartoznak.

Az ítéleteket a következőképpen csoportosítja Kant:

1. Analitikus ítéletek, amelyek a dolgokról nem adnak új ismeretet, alanyuk tartalmazza az állítmányt. Például: minden test kiterjedt.

2. Szintetikus ítéletek, amelyek újat mondanak a dolgokról, akár a jelenségekről, akár a magábanvalókról.

Kant szerint létezik a priori szintetikus ítélet, amely a magábanvaló dolgokról ad új ismeretet, más szóval létezik tiszta matematika. A matematikai tételek, vagyis az a priori szintetikus ítéletek igazságát a belső belátás (intuíció) biztosítja, amely velünk született képesség. A tiszta matematika tárgyát a térre és időre vonatkozó intuitív és a priori konstrukciók adják. Más szóval a tiszta matematika a tér és idő struktúráját vizsgálja a tapasztalattól függetlenül.

A tiszta matematika alkalmazhatóságát az biztosítja, hogy ami a priori intuitív úton elgondolható, az a posteriori úton, azaz tapasztalatilag megkonstruálható. Például egy háromdimenziós gömb gondolatilag, és ezért gyakorlatilag is konstruálható. Egy négydimenziós gömb logikailag ellentmondástalan fogalma viszont csak posztulálható, de intuitíve, és ezért gyakorlatilag sem konstruálható.

Brouwer továbbfejlesztette Kant előbbi gondolatait. Még a posztulálhatóságát is tagadta azon fogalmaknak, amelyek tudatilag nem konstruálhatók. Így nem léteznek a végtelen halmazok sem, ami egyúttal megoldja a körükben fellépő ellentmondások problémáját is.

Az ember el tud képzelni akármilyen nagy természetes számot, tehát el tudja fogadni, hogy számuk potenciálisan végtelen. De a természetes számok halmazát, mint lezárt egységet, vagyis az aktuális (tényleges) végtelent senki sem tudja elképzelni, tehát végtelen halmazok nem léteznek.

Szerinte a matematika a tapasztalattól független, nyelv nélküli tudattevékenység. A tételek igazságát a belső belátás (önevidencia) biztosítja. Ezért csak a konstruktív bizonyítások fogadhatók el, az egzisztencia bizonyítások nem, mivel ezek a harmadik kizárásának elvére (a trichotómia törvényére) épülnek, ami nem érvényes az intuicionista matematikában. Ezért annak eldöntésére, hogy egy A állítás és tagadása közül melyik igaz, nem elég csak az egyiket bizonyítani vagy cáfolni: mindkettőt kell konstruktívan igazolni, illetve cáfolni. Brouwer a következő példával illusztrálta érvelését. Tekintsük a 0123456789 sorozatot és a π (végtelen nem szakaszos) tizedestört alakját. Ez a sorozat vagy előfordul valahol π tizedestört alakjában, vagy nem. Legyen $n = 1$, ha a sorozat előfordul és legyen $n = 0$, ha nem. Semmilyen módszer nem áll rendelkezésre annak eldöntésére, hogy $n = 0$ vagy 1. Tehát n nem konstruálható. Ezért sem az az állítás, hogy a 0123456789 sorozat előfordul π tizedestört alakjában, sem az állítás tagadása nem igazolható.

A tér és idő a priori szerkezetére (amelyet az euklidészi geometria ír le) épülő kanti intuicionista matematika alapjait a nemeuklidészi geometriák felfedezése ingatta meg. Megdőlt a geometriai intuicióba vetett hit és ezután igyekeztek a matematikát nem a geometriai szemléletre, hanem az aritmetikára, vagyis a természetes számokkal való számolásra visszavezetni. Ezt a törekvést Kronecker német matematikus így fogalmazta meg: A természetes számokat Isten teremtette, minden más az ember műve. Egy másik német matematikus, Jacobi szerint pedig: Isten mindig aritmetizál, mintegy visszautalva Platón híres mondására: Isten mindig geometrizál. Ehhez kapcsolódva Brouwer is a természetes számokat tekintette a matematikai konstruálás alapjának, és az egész matematikát az aritmetikára igyekezett visszavezetni. A természetes számok alapintuíció révén mindenki számára adottak, és ez az egész matematika kiindulópontja. Tehát az egész matematikát a természetes számokból kell konstruktíve felépíteni. A matematikai objektumok mindaddig nem tekinthetők létezőnek, amíg nincsenek véges sok lépésben megkonstruálva a természetes számokból kiindulva. Annak kimutatása, hogy nemlétezésük ellentmondásra vezet, nem elegendő. A felépítés megtehető szemléletesen az egységnyi mennyiség ismételt duplázásával, illetve az időegység ismételt felezésével.

Az intuicionista számára a matematikai analízis jó része eldobandó, mert egyrészt végtelen halmazokkal dolgozik, másrészt sok benne a trichotómia törvényére épülő egzisztencia bizonyítás. Brouwer megkísérelt felépíteni egy intuicionista analízist végtelen halmazok és egzisztencia bizonyítások nélkül. Ebben az analízisben például minden valós függvény folytonos.

Logicizmus

Megalapozói az angol Russell és a német Frege, akik Leibniz munkásságából indultak ki. Leibniz a logikát olyan egyetemes tudománynak tekintette, amely minden más tudományt magában foglal, tehát a matematika is a logika része. Kétféle igazságot különböztetett meg:

1. Tényigazságok. Ezek a fizikai valóság igazságai. Véletlenszerűek, ellentétük is lehet igaz. Például: a papír, amire írok fehér. Az ilyen igazságok csak a mi világunkban érvényesek.

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{*54\cdot 43.\ \vdash\!:.\alpha,\beta\in 1.\supset\!:\alpha\cap\beta=\Lambda.\equiv.\alpha\cup\beta\in 2} \\
\multicolumn{3}{l}{\textit{Dem.}} \\
\vdash.*54\cdot 26. & \supset\vdash\!:.\alpha=\iota`x.\beta=\iota`y.\supset\!:\alpha\cup\beta\in 2.\equiv.x\neq y. & \\
\quad[*51\cdot 23] & \qquad\qquad\qquad\qquad\equiv.\iota`x\cap\iota`y=\Lambda. & \\
\quad[*13\cdot 12] & \qquad\qquad\qquad\qquad\equiv.\alpha\cap\beta=\Lambda & (1) \\
\vdash.(1).*11\cdot 11\cdot 35.\supset & & \\
 & \vdash\!:.(\exists x,y).\alpha=\iota`x.\beta=\iota`y.\supset\!:\alpha\cup\beta\in 2.\equiv.\alpha\cap\beta=\Lambda & (2) \\
\multicolumn{3}{l}{\vdash.(2).*11\cdot 54.*52\cdot 1.\supset\vdash.\mathrm{Prop}}
\end{array}
$$

1.2. ábra. *Az 1+1=2 állítás logikai levezetése* A matematika alapjai *362. oldalán.*

2. Észigazságok. Logikai alapelvekre épülnek, és minden lehetséges világban szükségszerűen igazak. Ilyenek a matematikai tételek. A matematika alkalmazható a mi világunkra, mert azt Isten úgy teremtette, hogy arra a tiszta matematika tételei alkalmazhatók legyenek. Ezért a mi világunk „a lehetséges világok legjobbika”. Ezt az állítást parodizálja VOLTAIRE *Candide* című regényében.

LEIBNIZ megteremtette a mai logikai jelölésrendszer alapjait is. Sőt megkísérelt kidolgozni egy egyértelmű logikai nyelvet a homályos, félreérthető köznapi nyelv helyett. A logicista filozófia LEIBNIZhez kapcsolódva a matematikát nem az aritmetikára, hanem a logikára akarja felépíteni a hamisnak bizonyult geometriai szemlélet helyett. Azt kívánták megmutatni, hogy a matematika pusztán a logika törvényeinek alkalmazása. Akkor már tudták, hogy a matematika visszavezethető a halmazelméletre, amit azonosnak tekintettek a logikával. Például az A részhalmaza B-nek logikai megfelelője egy implikáció: *ha A, akkor B*. A „halmaz” helyett az „osztály” megnevezést használták, ami logikai fogalom.

RUSSELL így fogalmaz egy helyen: „a tiszta matematika kizárólag olyan fogalmakkal foglalkozik, amelyek kevés számú alapvető logikai fogalommal definiálhatók. A tiszta matematika minden állítása levezethető kevés számú logikai alapelvből.” Ezt a logicista programot RUSSELL és WHITEHEAD dolgozták ki *A matematika alapjai* című művükben, amely 1910-ben jelent meg. Ebben például az 1+1=2 állítást is logikailag vezették le (1.2. ábra).

A logicista program kudarcát a halmazelméleti antinómiák felfedezése jelentette, amelyek közül az elsőt éppen RUSSELL találta meg. Elkerülésükre kidolgozta a típusok elméletét. Az alapobjektumok, amelyeket nem vetünk logikai vizsgálat alá, 0 típusúak. Ezek tulajdonságai 1 típusúak. Az 1 típusú objektumok tulajdonságai 2 típusúak, és így tovább. Azok a matematikai objektumok, amelyek egyetlen típusba sem tartoznak (pl. az összes halmaz halmaza) elhagyandók, így az ellentmondások elkerülhetők. Később találtak olyan ellentmondásokat, amelyek a típusok elméletével sem küszöbölhetők ki. A kudarc ellenére a logicisták óriási munkát végeztek a matematikai logika kiépítésében és az axiomatikus módszer továbbfejlesztésében.

Formalizmus

Ez az irányzat az intuicionizmussal és a logicizmussal való vitában született. Fő célja szintén az antinómiák kiküszöbölése és ezáltal a matematika kétségbevonhatatlan megalapozása volt. Legfőbb képviselője Hilbert.

A formalista filozófia szerint a matematika a formális rendszerek tudománya. Fogalmainak és a belőlük logikailag levezetett tételeknek nem kell jelentést tulajdonítani. Ezeknek nincs tartalmuk, nem lehet kérdezni, hogy igazak-e. Csak azt lehet kérdezni, hogy formailag helyes következtetésekkel adódtak-e.

A matematika így egy formális axiomatikus rendszerré válik, amellyel szemben csak az ellentmondásmentesség a követelmény. (Ezzel kapcsolatban Brouwer a következőket jegyezte meg: hiába bizonyítja be Hilbert, hogy pl. a halmazelmélet ellentmondástalan, ez nem változtat azon, hogy értelmetlen. Hilbert replikája: „Senki nem űzhet ki bennünket abból a Paradicsomból, amit Cantor teremtett számunkra.) A hagyományos matematikában az ellentmondások azért keletkeztek, mert az alapfogalmaknak és axiómáknak jelentést tulajdonítottak. Például a síkgeometriában lévő *pont* és *egyenes* alapfogalmaknak és mondjuk a *„Bármely két ponton át egy egyenes húzható”* axiómának nem szabad szemléletes jelentést adni. Az állítás logikai értéke nem függ attól, hogy milyen szemléletes tartalmat adunk a benne szereplő fogalmaknak. Nem fontos, hogy pont és egyenes alatt mit értünk, helyettük akár más szavakat is használhatunk. Például mondhatjuk, hogy *„bármely két izén át egy mizé húzható”*.

Tehát bármely matematikai elmélet átírható egy jelekből és játékszabályokból álló formális rendszerré. A matematika nem más, mint ilyen formális rendszerek tudománya. Úgy is mondhatjuk, hogy a formalista számára a matematika a formális levezetések tudománya, amely axiómákból logikai következtetésekkel tételeket készít. Ezeknek mindaddig nincs tartalma, amíg nem interpretáljuk őket. Például a *pont* és *egyenes* szavakat a szokásos módon. Ekkor már lehetnek igazak vagy hamisak az adott interpretációban.

A század közepére ez az irányzat vált uralkodóvá a matematika filozófiájában. Hatása kimutatható az „új matematika” tankönyveiben is. Ezekben túltengett a halmazelméleti-logikai formanyelv, a formális logikai megközelítés, gyakran mögöttes tartalom nélkül. A bizonyítások mellett háttérbe szorult a példákon és ellenpéldákon való fejlődés bemutatása, ami pedig az élő matematika fontos sajátossága.

A formalizmus ma visszaszorulóban van, amit az is elősegített, hogy sorra születtek olyan eredmények, amelyek megmutatták a formális axiomatikus módszer, vagyis a matematika biztos alapokra való helyezésének korlátait. Nem sikerült az axiómarendszerek ellentmondásmentességét bizonyítani, megmutatták eldönthetetlen problémák létezését, és így tovább.

A Lakatos-féle irányzat

A magyar származású Lakatos Imre az ötvenes években Angliában dolgozta ki tudományfilozófiáját, amelyet a *Bizonyítások és cáfolatok* címmel magyarul is megjelent könyvében publikálta.

Nézetei szorosan kapcsolódnak KARL POPPER tudományfilozófiai és PÓLYA GYÖRGY módszertani gondolataihoz. Elvetette a biztos alapok és kétségbevonhatatlan bizonyítások keresésére irányuló törekvéseket, azok kudarca miatt. Kritikája elsősorban a formalizmus ellen irányul, mert az elszakítja a matematikát annak történetétől. Lakatos az élő, fejlődő, nemformális matematikát vizsgálta, nem a formális rendszerekbe bekényszerített, halott, formális matematikát. A nemformális matematika nem a kétségbevonhatatlanul bebizonyított tételek számának növekedése révén fejlődik, hanem a feltevések szüntelen helyesbítésével, az elmélkedés és a kritika, a bizonyítások és cáfolatok logikája segítségével.

Filozófiai háttérül az a popperi felfogás szolgált, hogy a tudomány törvényeit nem lehet bizonyítani — és ez alól a matematika sem kivétel. Egy elmélet feltevésekből, találgatásokból indul ki, majd próbára teszik, kétségbevonják, és ha kiáll minden próbát, akkor átmenetileg megalapozottá válik, de soha nem bizonyítottá. Lehet, hogy egy tudományos elmélet objektíve igaz, de ezt teljes bizonyossággal soha nem tudhatjuk. Ezen pesszimista nézet alapjául az elméleti természettudományokban és a matematikában felbukkant ellentmondások, illetve kiküszöbölésükre irányuló törekvések kudarca szolgált. Sokan úgy fejezték ki kételyüket, hogy a matematikában csak azért hihetünk, mert működik. Így az érdeklődés a formális matematikától az „empirikus" matematika felé fordult.

Lakatos felfogásában a matematika nem tévedhetetlen, éppen a kritikától és helyesbítésektől fejlődik. Egy sejtésből kiindulva párhuzamosan keressük a bizonyításokat és ellenpéldákat, amelyek összefüggenek: az új bizonyítások régi ellenpéldákat magyaráznak, az új ellenpéldák régi bizonyításokat ingatnak meg.

Ez az elemzés nem a formális matematikára alkalmazható, amelyet nem sikerült senkinek felépítenie, hanem az élő, fejlődő matematikára, amivel az iskolában a tanároknak és diákoknak találkozni kell(ene). Lakatos könyvében a kifejtés módjául - nem véletlenül - egy tanár-diák dialógust választott.

A *Bizonyítások és cáfolatok* megadja a matematikai felfedezésnek, vagyis a nemformális matematikai elméletek fejlődésének sémáját is. Ez a következő szintekből áll:

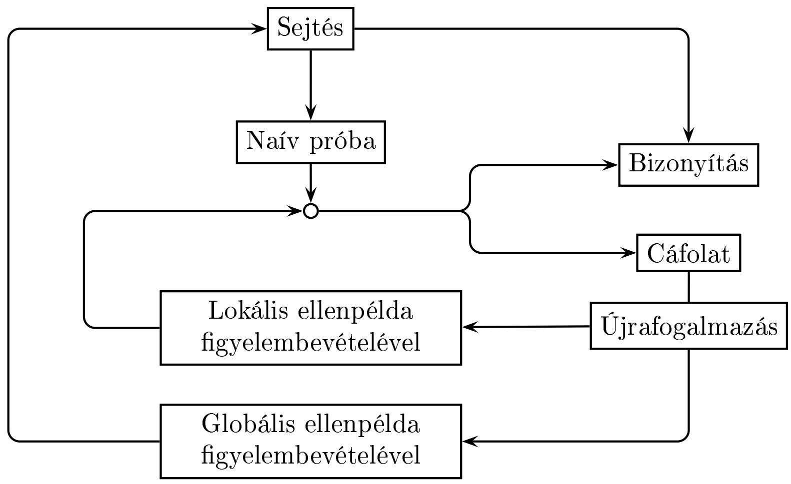
1. Primitív sejtés.
2. Bizonyítás. Egy durva gondolatkísérlet vagy érvelés, amely a primitív sejtést részsejtésekre vagy lemmákra bontja.
3. Globális ellenpéldák (a primitív sejtéssel szembeni ellenpéldák) merülnek fel.
4. A bizonyítás ismételt vizsgálata: azonosítják a „bűnös" lemmát, amelynek a globális ellenpélda helyi ellenpéldája. Ez a bűnös lemma korábban esetleg rejtett maradt, vagy tévesen azonosították. Most explicitté teszik ezt a lemmát és feltételként beépítik a primitív sejtésbe. A tétel — a helyesbített sejtés — felváltja a primitív sejtést. Ennek legfőbb új jellemzője az új, bizonyításból származó fogalom.

Ez a négy alapszint, amelyre még további szintek épülhetnek:

5. Megvizsgálják más tételek bizonyításait, hogy megnézzék, előfordul-e bennük az újra megalapozott lemma vagy az új, bizonyításból eredő fogalom. Esetleg megállapítják, hogy ez a fogalom különböző bizonyítások metszéspontjában található, s ennélfogva alapvető jelentőségű.

6. Ellenőrzik az eredeti és most megcáfolt sejtés mindeddig elfogadott következményeit.

7. Az ellenpéldákat új példákká változtatják, ami révén új vizsgálati területek tárulnak fel (1.3. ábra).



1.3. ábra. *A matematikai felfedezés* LAKATOS-*féle sémája.*

1.4. A matematika fejlődésének szakaszai

A matematika történetét többen és többféle szempont szerint osztották korszakokra. Az itt közölt felosztás közel áll a leginkább elfogadotthoz.

Empirikus matematika (Kr. e. VI. századig)

Ez a korszak az emberré válás korától (a kőkorszakoktól) a görög matematika megjelenéséig tartott. Ekkor alakultak ki hosszú folyamatok során a legegyszerűbb matematikai fogalmak, mindenekelőtt a szám és az alak fogalma. Majd ezekből kifejlődött egy egyszerű aritmetika és geometria. Megjelentek az algebra csírái is.

Az empirikus jelző arra utal, hogy a matematikát az induktív tapasztalatszerzés jellemezte, a megoldandó feladatok zömmel gyakorlatiak voltak. Kialakulnak bizonyos eljárások (tégy így és így, akkor kapod az eredményt), de nincsenek általános, elméleti jellegű megállapítások, és főleg nincsenek bizonyítások. A matematika még nem önálló, személyekhez köthető tudomány.

A legfontosabb eredmények a folyammenti civilizációkban születtek, vagyis Egyiptomban (Nílus), Babilóniában (Tigris és Eufrátesz), valamint Indiában (Indus és Gangesz) és Kínában (Hoang-ho és Jangce). A korszak végén már ismert volt a hagyományos általános iskolai anyag.

Az elemi matematika kora (XVII. századig)

A görög matematikában megtörtént a máig legnagyobb fordulat a matematika történetében: gyakorlati, induktív tudományból elméleti, deduktív tudománnyá vált. Megjelentek az általános tételek és bizonyítások. EUKLIDÉSZ pedig megadta az akkori matematika egységes axiomatikus felépítését.

Többszörös absztrakciókkal tovább folytatódott a matematikai fogalomrendszer kiépülése. A görög geometria hegemóniáját átvette az arab algebra, amelynek jelölésrendszerét az itáliai matematikusok alakították ki. Egy egyenletben az x ismeretlen, de állandó mennyiséget jelölt, ezért szokás ezt a korszakot az állandó mennyiségek matematikájának nevezni.

A matematika önálló tudománnyá vált és megszűnt személytelen volta. Az első név szerint ismert matematikus THALÉSZ volt. A korszak átöleli az antik (görög-római) ókort, a középkort és a reneszánszt. A fejlődés földrajzi útja a görög világtól Perzsián át Indiába, majd onnan arab közvetítéssel először Itáliába, végül Nyugat-Európába vezetett.

A kor fő eredményei közé sorolható a helyiértékes hindu-arab számírás elterjedése, a trigonometria önállósulása, az algebrai jelölésrendszer kialakulása, a logaritmus felfedezése, a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldása. Természetesen a görög matematika már említett nagy teljesítménye mellett. Összességében véve kialakult a hagyományos középiskolai tananyag.

Újkori matematika (XIX. század közepéig)

Kezdetét az jelzi, hogy DESCARTES bevezeti a változó mennyiségek, majd a függvény fogalmát. Egyszerűen szólva az egyenlet x és y ismeretleneiből egy függvény változóit képezte. A függvények és az általuk leírt jelenségek vizsgálatára NEWTON és LEIBNIZ megteremtette a matematikai analízist, közelebbről a differenciál- és integrálszámítást. Ezután kialakult a differenciálegyenletek elmélete, mint a természeti jelenségek matematikai elemzésének eszköze.

Ahogy egykor a görögök geometrizálták az algebrát, DESCARTES koordinátarendszere lehetővé tette a geometria algebrizálását. Önálló tudománnyá vált a számelmélet, folytatódott a magasabbfokú egyenletek vizsgálata, bevezették a valószínűségszámítás alapfogalmait. Mégis elsősorban az analízis fejlődött és differenciálódott. A logikai szigorúság nem játszott elsődleges szerepet, az igazolást inkább a gyakorlat oldaláról várták. Az analízis fogalmi megalapozatlansága csak később okozott problémákat. A korszaknak szinte jelképe EULER, aki műveiben összefoglalta kora matematikai ismereteit.

A tudomány központja ekkor már Nyugat-Európa. Először Anglia, majd Franciaország, végül Németország tekinthető centrumnak. Ez a kor a klasszikus kapitalizmus korszaka, amely az angol polgári forradalomtól, a felvilágosodáson és a nagy francia forradalmon keresztül, a XIX. század közepi forradalmakig ível. A korszak végére kialakult a hagyományos (műszaki) felsőoktatási tananyag.

A modern matematika korszaka

Kialakulása összefügg a matematika egyfajta válságával. Ez elsősorban a nemeuklidészi geometriák felfedezésében nyilvánult meg, amely kihúzta a szemléletességet, mint biztos alapot a matematikusok lába alól. Az analízis megalapozatlansága is egyre több ellentmondásra vezetett. Kialakult egy igény az alapok újragondolására, a nagyobb szabatosságra. Igyekeztek mindent axiomatikusan felépíteni, és a geometria helyett az aritmetikára visszavezetni. Később a halmazelméletre (logikára) való alapozás vált a jellemzővé. Még ma is ez a fő tendencia a halmazelméleti antinómiák, illetve az axiomatikus módszerrel kapcsolatos problémák ellenére is.

Egy igen magas fokú absztrakció keretében megvalósulóban van a matematika halmazelméleti egysége, főleg a Bourbaki csoport munkássága nyomán. A matematika egységes abban az értelemben, hogy minden ágában halmazokkal és halmazok közötti relációkkal foglalkozik. A halmazok lehetnek ponthalmazok, függvényhalmazok, számhalmazok, stb., a relációk lehetnek speciálisan leképezések, operátorok, műveletek stb.

Ha egy halmazon műveleteket értelmezünk, amelyek bizonyos tulajdonságokkal rendelkeznek, akkor különböző algebrai struktúrákhoz jutunk. Ezeknél általánosabb a relációs struktúra fogalma, amikor a halmazon valamilyen tulajdonságú relációk adottak, mivel a művelet speciális relációnak tekinthető. Pontosabban: egy n-ér művelet meghatároz egy $(n+1)$-ér relációt.

Egy halmaz absztrakt térré is tehető, ha benne geometriai jellegű tulajdonságokat értelmezünk bizonyos leképezések (funkcionálok, operátorok) segítségével. Így jutunk a metrikus tér és topologikus tér fogalmához.

A jelenlegi matematikai fogalomalkotás csúcsainak tekinthetők a műveletekkel, relációkkal és térszerkezettel egyaránt ellátott halmazok. Például egy rendezett topologikus csoport egy olyan halmaz, amin adott egy reláció, amelyre nézve a halmaz rendezett, egy binér művelet, melyre nézve csoport, valamint egy önmagába való topologikus leképezés, amelyre nézve topologikus tér.

A modern matematika további jellemző vonásai:

a) nagyfokú differenciálódás és integrálódás,

b) általánossá válik az axiomatikus módszer,

c) szétválik a tiszta és alkalmazott matematika,

d) kibővül a matematika alkalmazási köre,

e) halmazelméleti-logikai jelrendszer elterjedése.

A tudományos kutatások centruma ma az USA, de bizonyos részterületeken más országok is játszanak vezető szerepet. A matematikai kutatások egyik alcentruma Magyarország. A kutatások nemzetközivé válásával egyre nehezebb szétválasztani egy-egy eredményben az országok, sokszor még az egyes tudósok szerepét is. Korunk latinja, vagyis a tudományok nemzetközi nyelve az angol. A gépi nyelvek fejlődése talán valóra váltja egyszer LEIBNIZ álmát: egy egyértelmű tudományos nyelv kialakulását. De erről majd egy későbbi kor tudománytörténészei fognak írni.

Végezetül soroljuk fel a mai matematika főbb ágait, megjegyezve, hogy néhány részág besorolása és elnevezése vitatott: 1. matematikai logika, 2. halmazelmélet, 3. számelmélet (elemi, algebrai, analitikus, geometriai), 4. algebra (klasszikus, absztrakt, lineáris) 5. geometria (euklidészi, nemeuklidészi, analitikus, projektív, ábrázoló, differenciál), 6. analízis (valós, komplex, Fourier, funkcionál), 7. topológia (leíró, kombinatorikus, általános), 8. kombinatorika és gráfelmélet, 9. valószínűségszámítás (matematikai statisztika, játékelmélet, információelmélet), 10. matematikai optimalizálás (matematikai programozás, kibernetika, vezérléselmélet).

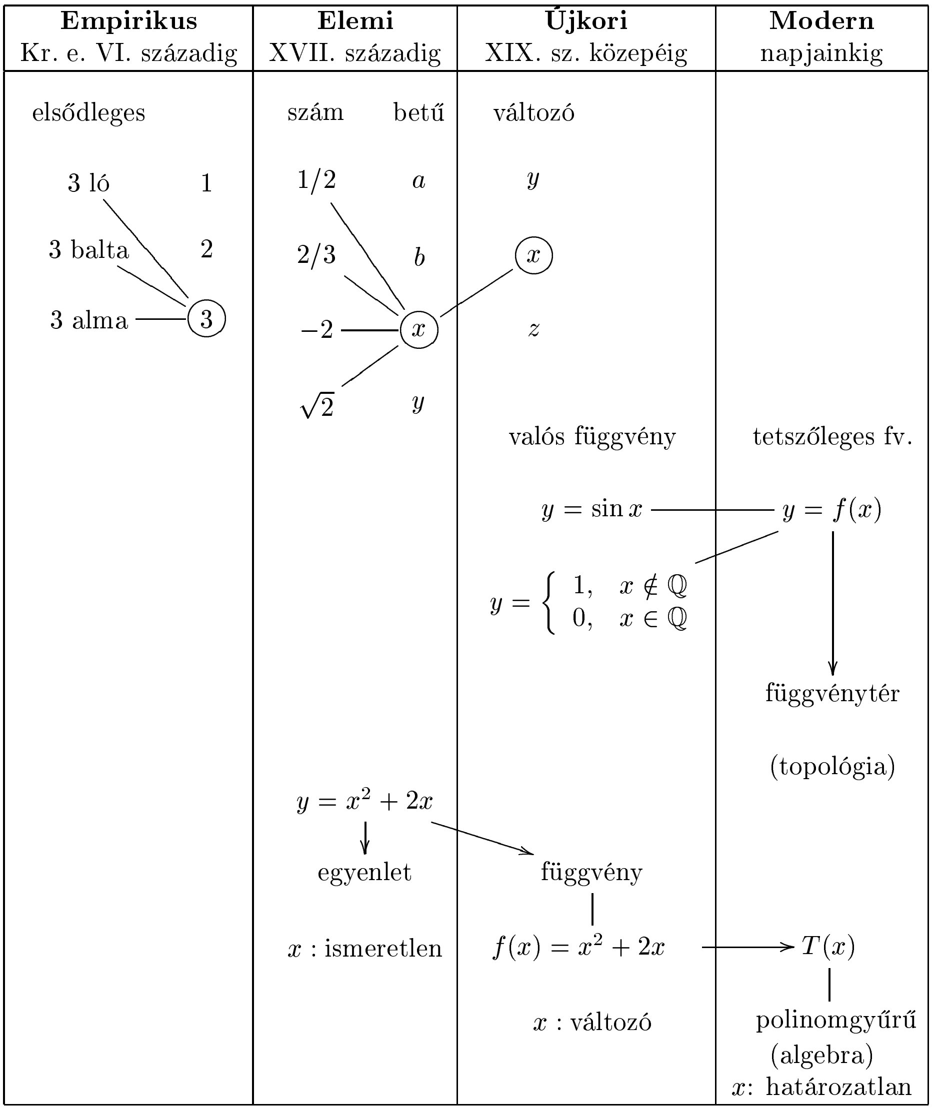
Ez utóbbi ág elnevezése és besorolása a legvitatottabb, lévén a legfiatalabb. Szokás operációkutatásnak is nevezni és idesorolni a játékelméletet, valamint a kibernetika részének tekintve az információelméletet.

A számítógéptudományt ma már önálló ágnak tekintik (de sokan a matematikai optimalizálás részének tartják) és hozzá sorolják a numerikus, grafikus és gépi módszerek elméletét.

1.4. ábra. *A régi és az új harca a matematikában. Az abakuszos és az írásbeli számolási módszer versenye egy régi metszeten.*

Korszak	**Empirikus** Kr. e. VI. századig	**Elemi** XVII. századig	**Újkori** XIX. sz. közepéig	**Modern** napjainkig
Főtárgy	Aritmetika	Geometria Algebra →	Analízis →	Topológia Absztrakt algebra
Legfontosabb fogalom	szám	egyenlet	függvény (leképezés)	struktúra (topologikus, algebrai)
Főprobléma	aritmetikai műveletek számokkal	egyenlet megoldása	függvényvizsgálat (deriválás, integrálás sorbafejtés segítségével)	struktúravizsgálat
példa	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 =?$	$x^2 + 2x = 15,\ x =?$	$y = x^2 + 2x,\ y\text{max} =?$	
Tudományos centrumok	folyammenti civilizációk (Mezopotámia, Egyiptom)	görögök, hinduk, arabok, Itália	Anglia, Franciaország, Németország	a tudomány internacionalizálódik

1.5. ábra. *A matematika fejlődésének szakaszai.*



1.6. ábra. *Néhány példa absztrakcióra.*

Gyakorlatok

1. Gyűjtsünk példákat az általánosító és egyszerűsítő absztrakcióra, valamint egyéb fogalomalkotási módszerekre a matematikában.
2. Bizonyítsuk be analitikus és szintetikus módszerrel a következő állítást: egy

derékszögű háromszögben

$$\frac{1}{m_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

(a, b: befogók; m_c: átfogóhoz tartozó magasság).

3. Keressünk további példákat az analitikus és szintetikus bizonyításra.
4. Fogalmazzuk meg az alábbi állítások kontrapozícióját és tagadását:
   (a) Minden síknégyszög négyzet.
   (b) A kilenccel osztható egész számok hárommal is oszthatók.
   (c) Tetszőleges derékszögű háromszögben $c^2 = a^2 + b^2$.
5. A 4. gyakorlat melyik pontjában lesz a feltétel szükséges, elegendő, szükséges és elegendő.
6. Keressünk példákat arra, amikor egy állítás kontrapozícióját bizonyítjuk indirekten.
7. Gyűjtsük össze, hogy főiskolai tanulmányaink során milyen axiómarendszerekkel találkoztunk.
8. Formalizáljunk szövegesen megadott definíciókat és tételeket az általános iskolai és főiskolai anyagból.
9. Mutassuk ki a kapcsolatokat Lakatos Imre és Pólya György módszertani elvei között.

Irodalom

I. Általános matematikatörténeti művek

[1] Bitay László: *Matematikatörténeti mozaik.* Dacia Könyvkiadó, 1984.

[2] Kofler, E.: *Fejezetek a matematika történetéből.* Gondolat, 1965.

[3] Lévárdi László–Sain Márton: *Matematikatörténeti feladatok.* Tankönyvkiadó, 1982.

[4] Ribnyikov, K. A.: *A matematika története.* Tankönyvkiadó, 1968.

[5] Sain Márton: *Nincs királyi út! (Matematikatörténet).* Gondolat, 1986.

[6] Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC.* Tankönyvkiadó, 1987. 5. kiadás.

[7] Struik, D. I.: *A matematika rövid története.* Gondolat, 1958.

[8] Szerényi Tibor: *A matematika fejlődése.* Tankönyvkiadó, 1975. Jegyzet.

[9] Szász Gábor: *A matematika fejlődése.* Tankönyvkiadó, 1968. Jegyzet.

II. A matematikával foglalkozó művek

[10] Davis, P. I.–Hersh, R.: *A matematika élménye.* Műszaki Könyvkiadó, 1984.

[11] Frege, G.: *Logika, szemantika, matematika.* Gondolat, 1980.

[12] Kalmár László: *Integrállevél.* Gondolat, 1986.

[13] Radamacher, H.–Toeplitz, O.: *Számokról és alakzatokról.* Tankönyvkiadó, 1953.

[14] Rényi Alfréd: *Ars mathematica.* Magvető Kiadó, 1973.

[15] Russell, B.: *Miszticizmus és logika.* Magyar Helikon, 1976.

[16] Ruzsa Imre: *A matematika és filozófia határán.* Gondolat, 1968.

[17] Vekerdi László: *A matematikai absztrakció történetéből.* Kriterion Könyvkiadó, 1972.

2. fejezet

Az empirikus matematika

Nem túlzás azt állítani, hogy a matematika egyidős az emberiséggel. Már az emberré válással együtt kezdtek kialakulni olyan képességek, mint különbségtétel különböző halmazok és alakok között, amelyek a szám és alak fogalmak kialakulásának előfeltételei. A matematika keletkezésének erről a korai korszakáról ismereteink nincsenek, csak feltevéseink. Tehát megállapításainkkal nagyon óvatosan kell bánni és semmiképpen sem szabad őket beleerőltetni valamilyen ideológiai prekoncepcióba. A kőkorszakokból már vannak közvetett forrásaink, a későbbi írott történelem korából pedig írott dokumentumok is állnak rendelkezésre.

2.1. A matematika keletkezése

Az emberré válás kora a *csiszolatlan kőkorszak* (paleolit) idejére tehető, ami körülbelül Kr. e. 500 000-től Kr. e. 10 000-ig tartott. Ekkor jön rá az ember a tűz használatára, gyűjtögető, majd vadászó életmódot folytat. Valamilyen vallási rítus megléte is feltételezhető. Ekkor kezdődött meg a szám és alak fogalmának kialakulása.

Ebből a korból közvetlen forrásaink nincsenek. Az írásbeliség előtti idők matematikájának vizsgálatában az alábbi közvetett forrásokra támaszkodhatunk:

a) régészeti leletek, barlangrajzok;

b) kőkorszakbeli viszonyokat tükröző törzsek megfigyelése;

c) a matematika kialakulása a gyerekeknél (az egyedfejlődés és a fajfejlődés kapcsolata);

d) a számnevek és egyéb elnevezések etimológiai elemzése.

Az ember valószínűleg még a tűz használatának felismerése előtt, kb. 300 000 évvel ezelőtt tett szert a halmazok közti különbségtétel, majd a különböző halmazokban levő közös vonás (az azonos számosság) felismerésére. Ez is több lépésben történt. Először az egy és sok között tudott az ember különbséget tenni. Észrevette, hogy különbség van egy és sok ember, egy és több tárgy, stb. között. Ezek párba állításával rájött a megfeleltetés fogalmára. Ezután felismerte, hogy megfeleltethetők egymásnak kételemű halmazok is. Két kéz párba állítható a két szemmel, két kaviccsal stb. Következő fokozatként rájött, hogy mindezek párba állíthatók mondjuk két ujjunkkal. Egy ilyen „általános egyenértékes" felismerése már tükrözi annak megsejtését, hogy ezekben a halmazokban van valami közös: az azonos számosság. De ennek explicit megjelenéséig még hosszú idő telt el.

Az *1 — sok*, illetve *1 — pár (2) — sok* megkülönböztetésének fokozatán minden nép átment. Ezt nyelvi emlékek is őrzik, bár a számnevek csak jóval később jelentek meg. Sok mai nyelv is megkülönbözteti az egyes, a kettes és a (kettőnél több) többesszámot. Ilyenek a sémi nyelvek (héber, arab, stb), valamint rokon nyelveink közül a vogul. Görögül az állam polisz, a két állam polei, a kettőnél több állam poleisz. Arabul a tanár mudarrisz, két tanár mudarriszáni, több tanár mudarriszúna. Ez a megkülönböztetés az igeragozásban is megmaradt: jaktub — valaki ír; jaktubáni — (ketten) írnak; jaktubúna — (kettőnél többen) írnak.

Primitív törzsek életének megfigyelése is alátámasztja a fentieket. Mungo Park angol utazó a XVIII. században találkozott olyan afrikai törzzsel, amelynek tagjai — ahogy írja — valósággal könnyeztek a megerőltetéstől, ha valamiről azt akarták mondani, hogy több kettőnél. Kezdetben a gyerek is szívesebben mond kettő meg egyet, mint hármat, ha három tárgyat lát.

A számsor kialakulásában az *1 — sok*, *1 — pár — sok* után döntő lépés volt a 3 megjelenése, mint önálló szám. A három megszüntette a pár szemléletes egységét, amelyet a magyar nyelv is őriz: egyesszámot használ a páros testrészekre. Ezután a pár már ugyanolyan számmá (kettővé) válik, mint a három, vagy az egy. Ez lehetővé tette a továbbszámlálást, ami kezdetleges kettes, illetve hármas számrendszerek kialakulásához vezetett. A kettes rendszerben a kettő, a hármasban a három a kitüntetett egység, a továbbszámlálás alapja. A három ilyen szerepét is őrzik nyelvi emlékek, mesék. A francia a nagyon jót háromszorosan jó (très bien) alakban fejezi ki. A magyar mesékben mindig három fiú van, három a magyar igazság, és így tovább.

Az ausztráliai törzsek között találtak példát, mind a kettes, mind a hármas számrendszerre:

kettes			hármas		
1	=	enea	1	=	mal
2	=	petcheval	2	=	bulan
3	=	petcheval-enea	3	=	guliba
4	=	petcheval-petcheval	4	=	bulan-bulan
			5	=	bulan-guliba
			6	=	guliba-guliba

A rendszert tovább nem építették ki, ezek után már a „sok” következett. A számolás természetesen nem fejből, hanem ujjak segítségével manipulatív úton történt.

A számfogalom kialakulása jóval megelőzte a számnevek megjelenését. Az elvont szám fogalma már megvan, amikor kialakul a halmazok összehasonlításának (kevesebb — több), majd az 1 — 1 megfeleltetésének képessége, függetlenül a megnevezés és a megszámlálás képességétől.

Egy törzsnél az a szokás, hogy az lesz a törzsfőnök, akinek a legtöbb kecskéje van. Szemre kiválasztják a két legesélyesebbet, majd egy karámba egyenként felváltva beengedik a kecskéiket. Akinek előbb fogy el a kecskéje, az vesztett.

Egy cejloni ősi népcsoport tagja így számlálja meg kókuszdióit. Sorba rakja a diókat, mindegyik mellé tesz egy pálcikát és mindig mondja: az egy. Számnevei ugyanis nincsenek, nem tud számolni, mégis megszámlálta dióit: leképezte őket a pálcikák számára. Ha megkérdezik tőle, hány diója van, akkor rámutat a pálcikákra és azt mondja: ennyi. A hiányt hasonlóan állapítja meg.

Újabb lépcsőfok a fejlődésben az, amikor a pálcikák, ujjak, kavicsok szerepét átveszik a csomók és rovások, amelyek már a számírás előzményei. Szakmódszertani kifejezéssel élve: ekkor áttérnek a manipulálásról a szemléltetésre. Erre a legrégibb bizonyíték egy 30 000 éves farkaslábszárcsont (2.1 ábra), amit a csehországi Vestonicében találtak 1937-ben. A csontra 55 rovás van felvésve, ebből 25 ötös csoportokban, amit lezár egy hosszú rovátka, majd új sorozat kezdődik 30 rovátkával. Hasonló csontot találtak nemrégiben Zaire-ban is, amely 8000 éves. A csontok rendeltetését nem ismerjük, de a leletekből kiderül, hogy a számadatok rögzítésére szolgáló igény korán megjelent az emberiség történetében, bizonyosan az egyéb információk rögzítésére támasztott igény előtt.

2.1. ábra. *A legrégebbi számrovásos lelet, 30 000 éves farkaslábszárcsont* $55 = 25 + 30$ *rovátkával.*

A számrovás megelőzte a számok elnevezését is. Ez nem is meglepő: könnyebb rovásokat vésni (1 tárgy = 1 rovás), mint különböző számokat nevekkel pontosan azonosítani. Ez csak jóval később, a csiszolt kőkorszakban (neolit) történt meg. Azt is állíthatjuk, hogy a számrovás és számfogalom régebbre datálható, mint az első technikai találmányok: a fémek, illetve a kerék alkalmazása (a kerék feltalálóinak a sumérokat tartják).

Felmerülhet még az az inkább filozófiai probléma, hogy miért alakult ki a számfogalom? Materialista alapállásból erre a válasz az, hogy az ember gyakorlati szükségletei miatt. A csere és termelés megindulásával szükségletté vált a számolás, ezért kialakult a számfogalom. A miérteket persze lehetne folytatni, például miért alakult ki a termelés?

Van olyan elmélet is, amely szerint a számolás rituális eredetű. Az ősi rítusokban a történések és a szereplők meghatározott sorrendben követték egymást. Ebből keletkezett a számolás (sorszámozás) szükségessége, vagyis a sorszám előbb keletkezett, mint a tőszám. Indoklásul azt szokták felhozni, hogy a világ minden ismert régi civilizációjában megkülönböztették a férfi és női (természetes) számokat. A páratlanok mindenütt a férfi, a párosak pedig a női számok voltak. A *Biblia* szerint is Isten előbb teremtette a férfit, majd utána másodiknak a nőt. Ez az elmélet nem zárja ki, hogy a számfogalom a Föld egy adott pontján keletkezett, majd innen terjedt el. A ma legelfogadottabb humángenetikai elmélet szerint az emberiség egy tőről, valahol Afrikából ered. A mai genetikai módszerekkel ki lehet mutatni, hogy a fejlődés során hogyan „osztódott" az emberiség.

Szóba jöhet még az időszámítás is, mint a (sor-) számfogalom kialakulásának előmozdítója. Minden primitív nép igyekezett valahogy időt számolni, a napok egymásutániságát megragadni, és naptárt készíteni.

A geometriai alapfogalmak kialakulása is a paleolit korban kezdődött alakfelismerésekkel (egyenes fa, kerek hold, stb.) és térbeli tájékozódással (alatta, felette, közötte). Ezekből a neolit korban alakult ki a geometriai alakzat fogalma, valamint az egyéb geometriai alapismeretek. Az akkori leletek (barlangrajzok, használati tárgyak) mutatják az egybevágóság, a szimmetria és a fontosabb geometriai alakzatok ismeretét. Ezek a valóságban meglévő dolgok megfigyeléséből absztrahálódtak.

Feltehető itt is a „hogyan keletkezett a geometria?" filozófiai problémája. Keletkezhetett gyakorlati szükségszerűségből, de a rend és a harmónia iránti esztétikai érzékből, valamint a szép élvezetéből, amelyek a mai napig inspirálják a matematikusokat. A rituális eredet sem kizárt. A régi vallásokban az oltárak, templomok, sírok (lásd a piramisokat) építésére pontos előírások voltak. Négyzet, téglalap, trapéz, kör alapúaknak kellett lenniük, sőt méreteikre megadott arányok voltak előírva. Az alapéleknek sokszor valamilyen égtáj irányába kellett mutatniuk.

A *csiszolt kőkor* (neolit) körülbelül Kr. e. 10 000-től az első civilizációk megjelenéséig tartott, azaz körülbelül Kr. e. 3500-ig. Ebben a korszakban már szervezett élelemtermelés és csere folyik. Kialakul a beszéd, ezzel együtt a számnevek, majd az igazi számrendszerek. Ennek a folyamatnak is több fokozata van. Kezdetben nemcsak a szám absztrakt fogalmának, hanem más fogalmaknak szóbeli kifejezője sem volt meg. Ezért hasonlatokkal éltek. Ha azt akarták mondani, hogy egy tárgy fekete, akkor azt mondták, olyan mint a korom. Hasonlóan, ha valamiből öt volt, akkor azt mondták: annyi, mint a kéz.

Később a számnevet melléknévként használták: két fa. Más szót használtak a számra, aszerint, hogy mire vonatkozott. Ennek emlékei a mai magyar nyelvben és gondolkodásban is megvannak. Hogy kettő van valamiből azt több szóval is ki tudjuk fejezni, és ezek csak bizonyos dolgokhoz illenek: két, dupla, kettős, pár, iker, duett. Cipő esetén pár cipőről, kávénál dupla kávéról, kettős szülésnél ikrekről, éneklésnél duettről beszélünk. De furcsa lenne az ikerkávé, a dupla gyerek, a cipő duett stb. szókapcsolat. Hasonló jelenséget találunk más nyelvekben is.

Végül valamilyen egyenértékes nevével azonosították a számokat. Az ósumérban az 1 neve „férfi", a 2 neve „nő". Az óindben az 1=holló, 2=szem. Végül a szám absztrakt fogalmával együtt ezek az elnevezések módosultak, jelentésük elhomályosult és megjelent az absztrakt számnév. A számnevek eredeti jelentését csak elmélyült etimológiai kutatásokkal lehet valószínűsíteni. Sok esetben a számnevek a testrészek neveiből származnak a testrészeken (főleg ujjakon) való számolás miatt.

A neolit korszak végének matematikai színvonalát lemérhetjük a braziliai bakairi indiánok példáján, akiknél a múlt század végén egy német expedíció járt. Számneveik a következők voltak:

1	=	tokále	4	=	ahágе ahágе
2	=	ahágе	5	=	ahágе ahágе tokále
3	=	ahágе tokále (vagy aheváo)	6	=	ahágе ahágе ahágе

Ha egy kukoricaszemet tettek eléjük, rögtön rámondták: tokále, és megérintették a szemet bal kezük kisujjával. Ha két szemet kellett megszámlálniuk, akkor előbb összetolták azokat, megfogták jobb kezükkel a bal kéz kis- és gyűrűsujját, s csak azután mondták: ahágе. Három kukoricaszemet először kettőre és egyre osztottak, megérintették a két szemet az előbbi két ujjukkal, és mondták: ahágе, majd a magányos szemet megérintették a bal kezük kisujjával, a másik kettőhöz tolva mondták, hogy „tokále" majd rögtön utána „ahágе tokále". Ujjaik használatával így el tudtak számolni hatig, a többire azt mondták „méra" (sok).

A bakairi indiánnak annak elmondásához, hogy kivágott 5 fát, három mondatra volt szüksége: Kivágtam 2 fát. Újra kivágtam 2 fát. Kivágtam még egyet. Hogy hány napig tartott egy út, azt így magyarázták. A jobb kéz lassan emelkedve egyenletes haladással ívet írt le keletről nyugatra, aztán hirtelen a bal arcra nyomódott, egy darabig ott maradt, közben a szem fáradtan lehunyódott. Majd az egész kezdődött előről a második nappal. Ha közbekérdezéssel vagy más módon megzavarták a mesélőt, akkor az egészet kezdte elölről.

2.2. A számrendszerek kialakulása, a számírás kezdetei

A kettesre és hármasra épülő kezdetleges számrendszerek után az ókori civilizációban igazi számrendszerek alakultak ki. Nagyobb számok megszámlálása már csak többszörös csoportosítással volt lehetséges, ami minden számrendszer közös alapelve. Az alapszám (csomószám) megválasztása már lehet eltérő.

A számrendszerek többnyire a testrészeken való számolásból alakultak ki, ami magyarázza a tizes, húszas, ötös számrendszerek gyakoriságát. Nehezebb magyarázni a tizenkettes, a hatos és a hetes számrendszerek eredetét.

Tekintsük át most röviden, milyen számrendszerek alakultak ki a történelem során a tizes mellett. Megjegyezzük, hogy ugyanazon nép egyidőben több számrendszert is használhatott különböző célokra.

Az *ötös* számrendszer tisztán csak egyes délamerikai törzseknél található meg, az egy kézen való számlálás örökségeként. Ők így számolnak: 1, 2, 3, 4, kéz, kéz, és egy, kéz és kettő, stb. Más népeknél az ötös rendszer keveredik a tizessel vagy húszassal. A római számjegyek is az ötös és a tízes számrendszerek keveredését mutatják.

A *hatos* számrendszer egyes észak-afrikai törzseknél használatos, helyenként keverve a tizenkettessel. A nyelvészeti kutatások szerint a finnugorok is hatos számrendszerben számoltak valamikor. Ezt az 1–6 számnevek közös gyökere igazolja ezeknél a népeknél.

A *tizenkettes* számrendszer emlékeit több nyelv őrzi a különböző mértékegységek elnevezésében. Az angol mellett más germán nyelvek számnevei is mutatják a tizenkettő kitüntetett szerepét. A tizenegynek és tizenkettőnek külön neve van és csak tizenháromtól kezdődik a tíztől való számolás az elnevezésben. A tizenkét csillagkép, tizenkét hónap és tizenkét óra sem véletlenül született meg. A magyar nyelvben a tucat és a nagytucat utal erre a számrendszerre.

A *húszas* alapú számrendszer a közép-amerikai mayáknál fejlődött ki leginkább. Logikáját megtörte az, hogy rendszerük a naptárjukon alapult. Ebben egy év $360 = 20 \cdot 18$ napból, vagyis 18 húsznapos hónapból állt. Tehát a 20 alapszámot nem 20^2, hanem $20 \cdot 18$ követte, utána már „rendesen” ment a dolog. Így például a 1231 náluk az $1 \cdot 20^2 \cdot 18 + 2 \cdot 20 \cdot 18 + 3 \cdot 20 + 1$ számot jelölte — természetesen más számjegyekkel. A húszas rendszer emlékeit a francia, dán, angol, gael és walesi nyelv is őrzi a régi kelták nyomán. A franciában például 80 neve négy-húsz (quatrevingt).

A *hatvanas* számrendszer közismerten a babiloniaknál alakult ki. Erre a rendszerre utal az időszámításban az 1 óra= 60 perc $=60^2$ másodperc, valamint a geometriában a teljes kör 360 részre osztása (360 fok).

A legkülönösebb a *hetes* számrendszer gyakorisága Afrikában és a Közel-Keleten, valamint szigorú kivételként az ugor népeknél, köztük az ősmagyaroknál. A hetes szám számos afrikai törzsnél ma is misztikus szerepet tölt be. Neve tabu alatt áll. Inkább $6 + 1$ alakban mondják ki, vagy egy $6 + 1$ jelentésű szóval helyettesítik. Nemcsak nyelvészeti, hanem építészeti emléke is van a hetes egykori kitüntetett szerepének Afrikában. A sivatagi berberek (tuaregek) ősi, földbe épített agyagvárosa a líbiai Gadameszben magán viseli a hetes szám jegyét: hét kapuja, hét bástyája, hét tere stb. van.

A héberek egykori hetes számrendszerét vallási kultuszuk és a *Biblia* őrzi. A hét a teljességet jelképezte: hét lélek = minden lélek. Esküdni héberül nisba, jelentése: magát meghétszerezni. Valamit hétszer végezni annyi, mint tökéletesen végrehajtani (hétszeres bosszú, hétszeres megbocsátás). A nagy ünnepek hét napig tartanak (pászkaszentelés, templomszentelés, sátoros ünnep). Engesztelő áldozatnál hét állatot áldoztak és a vért hétszer hintették.

A *Bibliában* különösen a *Jelenések könyvében* szerepel gyakran a hetes. Istennek hét szeme, a Báránynak hét szeme és hét szarva van; hét van a pecsétből (lásd hét pecsétes titok), a haragpohárból, a trombitából, a szentségből. Isten hét nap alatt teremtette a világot, hét szűk és hét bő esztendő van. Húsvét és Pünkösd között éppen $49 = 7^2$ nap van.

Az ugorok közös hetes számrendszerére a nyelvi bizonyíték az 1–7 számnevek közös gyökere, valamint a „hét" kettős jelentése: jelenti a hetes számot és a hét napból álló egységet. Csak kevés más nyelvben van így. A magyar mesék és regék nem véletlenül beszélnek hétmérföldes csizmáról, hétfejű sárkányról, hét vezérről, hetedhét (azaz 49) országról. Szólásainkban is gyakori a hét, néha együtt a hattal: „hete jő, hete megyen"; „több a hét a nyolcnál". Továbbá: „Akkorát hazudik, mint ide hat hét" (nagyot hazudik). „Azt sem tudja hány hét hat hét" (elvesztette a fejét).

A magyar és ugor néphagyományban, az ősi hitvilágban is sokkal gyakrabban szerepel a hetes mint más népeknél. Jelentése általában a dolgok nagy számára, méretére, hosszú időre vonatkozik. Ez összefügg azzal, hogy a hetes számrendszerben hét az első csomószám, vagyis egy befejezett szakasz a számolásban. A hetes többszöri ismétlése pedig a túlzó foknak felel meg.

A legfőbb isten a hetedik menyországban lakik. A pokol is hét rétegű. A nagyon rossz gyerekbe hét ördög bújik bele. Átkozódásban gyakori volt a hétrétű görcs, a hetvenhét féle hideglelés és a hetvenhét istennyila emlegetése. Az ördög öreganyja pedig hétszázhetvenhét éves.

Az ajtó hétté nyitása a nagyon kinyitást, a hétté álló tűz a sokfelé terjedő nagy tüzet fejezi ki. A nagyon nagy mélységre használták a „hét kérges föld hetedik köze" kifejezést. A „hét nap hét éjjel" várakoztunk kifejezés nagyon hosszú várakozást jelent.

A számírás előzményeiről, vagyis a *számrovás*ról és *csomózás*ról elmondható egyrészt, hogy kezdetei nagyon messzire nyúlnak vissza, másrészt, hogy több népnél szinte napjainkig fennmaradtak.

A legrégebbi rovásos lelet — a már említett farkaslábszárcsont — még nem tekinthető igazi számrovásnak, amelyben külön jel van 1-re, 5-re, 10-re, esetleg még nagyobb számokra. A *rováspálcát*, amire a jeleket vésték, több országban adósságok feljegyzésére, illetve nyugtaként elszámolásra használták. A „sok van a rovásán" szólás arra utal, hogy régen a fogadósok a mestergerendára jegyezték, jobban mondva rótták fel a tartozásokat. A hortobágyi számadó pásztorok is sokáig használták az ún. páros rovásfát. Erre annyi jelet véstek, ahány állatot a gazda rábízott a számadóra. Ezután a fát hosszában kettéhasították és egyik fele a gazdánál, a másik a pásztornál maradt.

Hasonló szerepet töltött be a rovásfa Angliában. Ott a bankok is használták „folyószámla" vezetésére. Az angol hagyománytiszteletre jellemző, hogy még a XIX. század elején is alkalmazták őket. Végül az angol parlament 1826-ban betiltotta használatukat és a rováspálcákat elégettette. Az esetről DICKENS (angol író) is megemlékezett egy művében.

A rováspálcákat más népeknél is megtaláljuk, igen változatos formában. Az Indiai-óceánban fekvő Nicobar-szigetek bennszülött lakói például a kókuszdiók megszámlálására egy kb. fél méter hosszú bambuszrudat használtak. Ennek egyik végét felhasogatták és ezekre vésték a jeleket. Az oroszok az adósságokat olyan rovásfákra vésték fel, amelyeket egy lyukon keresztül drótkarikára fűztek fel. Az adósság törlesztése után a jeleket vagy lefaragták, vagy elégették a fát. Hasonlóan használták a rovásfát Svájcban is, ahol igen elterjedt volt használatuk (2.2. ábra).

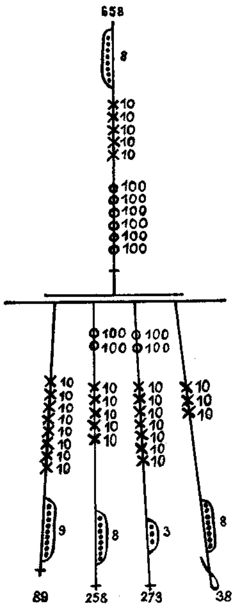
2.2. ábra. *Svájci rovásfák a számrovás jeleivel.*

A számadatok rögzítésének másik nem írásos módszere a *csomózás*, amelyet talán a kínaiak alkalmaztak először. A csomókat nádból vagy kákából készített zsinegekre tették, úgy, hogy ezekre gabonaszalmával vagy kákával csomót kötöttek.

A csomózás Afrikában is igen elterjedt volt, sokszor együtt a rovással. A Kilimandzsáró lábainál élő vadászó törzseknél, ha a férj vadászatra indult, akkor két pálmarostra annyi csomót kötött, ahány napig távol akart lenni. Egyet magával vitt, egyet a feleségénél hagyott. Mindennap kibontva egy-egy csomót, mindketten tudták, mikor kell véget érnie a vadászatnak. A feleség viszont fakanalát használta rováspálcaként. Ha férje megverte, akkor egy rovást vésett rá. Ha a fakanál nyele betelt, akkor joga volt elválni férjétől.

A legmagasabb szintre az inkák fejlesztették a csomózást. A mai Peru területén élő inkák a XIII. században fejlett civilizációjú és központosított birodalom urai voltak. Birodalmukat a spanyol hódítók semmisítették meg.

Az inka birodalom államigazgatási feladatait *kipu*nak nevezett csomózott zsinórok segítségével végezték. A kipu egy alapzsinórból és különböző színű rákötözött fonalakból állt (2.3. ábra). Az alapzsinóron függtek a csomózott zsinórok. A csomók elrendezése tükrözte a helyi értéket. A tartózsinórhoz legközelebb voltak a legnagyobb helyi értékek, majd távolodva a kisebbek, végén az egyesek. Több zsinór adatait összegezni tudták. Az összegezendő zsinórok azon hurkain, amelyekkel őket az alapzsinórhoz erősítették, újabb zsinórt bújtattak át, s ezen összegezték az összefogott zsinórok adatait. Ez vezette rá egyébként a kutatókat arra, hogy a kipu számadatok megőrzésére szolgált.



2.3. ábra. *Inka kipu képe.*

A kipun a színnek, a csomók formájának, a hosszúságnak mind jelentése volt. Általában színnel különböztették meg a férfi (páratlan) és a női (páros) számokat rögzítő zsinórokat. A sárga szín az arannyal, a fehér az ezüsttel, a zöld a gabonával, a kék a vallással kapcsolatos adatokat jelölte. A kipuk olvasása nem volt könnyű. Erre egy külön hivatalnokréteg alakult, ami a minden városban meglévő kipu hivatalokban dolgozott és őrizte a kipukat.

Az inka kipu mai utóda a perui indiánok kimpuja. Ez kilyukasztott gyümölcsmagokkal összefogott zsinórokból áll. A helyiértéket a zsinórok száma, az alaki értéket pedig a gyümölcsmagok száma adja.

A kipu (és kimpu) már lényegében helyiértékes számrögzítés, amely azonban nem használ számjegyeket így nem tekinthető számírásnak. A számírás más civilizációkban alakult ki.

2.3. Egyiptom matematikája

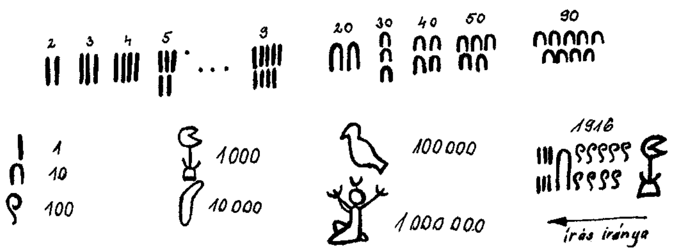
Az ókori Egyiptom egyike volt azoknak a nagy folyammenti kultúráknak, ahol az emberi civilizáció megszületett, és amelyek történelme sok hasonlóságot mutat.

A Kr. e. IV. évezredben ezekben a kultúrákban fejlődött ki az írás és számírás, kezdődött meg a fémek felhasználása, és a kerék alkalmazása.

Egyiptomot a Nílus ajándékának szokás nevezni, ahol az élet szinte minden területe kapcsolódik valahogyan a sivatagos környezetben az életet jelentő, vizet adó folyóhoz. A terület minden oldalról védett, kivéve a Sinai félszigetet, ezért Egyiptomot alig érték külső támadások. Ez lehetővé tette hosszú ideig fennálló birodalmak kialakulását, de egyúttal a stagnálás lehetőségét is magában hordozta. Az egyiptomi kultúra megrekedt egy kezdetben elért színvonalon.

Az ókori Egyiptom története három korszakra osztható: Óbirodalom (Kr. e. 3000–Kr. e. 2000), Középbirodalom (Kr. e. 2000–Kr. e. 1700), Újbirodalom (Kr. e. 1200–Kr. e. 700). Ezután perzsa hódítás, majd a perzsákat legyőző NAGY SÁNDOR uralma következett Kr. e. 332-től. Ez már egy új civilizáció, a görög kultúra korszaka.

Az óbirodalom korában épültek a nagy piramisok és alakult ki a képírás és számírás, amelyet *hieroglifikusnak* nevezünk. A hieroglifa görög szó, szent bevésést jelent, ami arra utal, hogy az egyiptomi képírás és számírás jeleit piramisok belsejében, templomok falában, kőbe vésve találták meg (2.4. ábra).



2.4. ábra. *Az egyiptomi hieroglifikus számírás jegyei.*

A hieroglif számírás jegyei a papiruszon tollal való írásra történő áttéréskor kurzívabb, hieratikus (papi) számjegyekké módosultak. A Kr. e. VII. században újabb változat alakult ki: a demotikus (népi) számírás.

Az egyiptomi számírás tízes számrendszerbeli, de nem helyiértékes. Ugyanazon jegy mindig ugyanazt a számot jelöli, és a számokat az összeadási elv szerint kell leolvasni, rendszerint jobbról balra. A hieroglifák nem tartalmaztak matematikát csak számjegyeket. Az egyiptomi matematikát későbbi, hieratikus jegyekkel írott papirusztekercsekből ismerhetjük meg. A papirusz nem maradandó anyag, így kevés maradt fenn belőlük. Matematikai szempontból a két legfontosabb a *Rhind-papirusz* és a *moszkvai papirusz*. Mindkettő középbirodalombeli és az írnokiskolai oktatás céljait szolgálták.

Az írnokok voltak a papok mellett a kultúra hordozói. Nélkülözhetetlenek voltak a fáraó birodalmának igazgatásában. Ők számolták a piramisok építésekor a béreket, a szükséges anyagmennyiséget.

A Rhind papiruszt HENRY RHIND skót régész vásárolta 1858-ban és a British Múzeumnak ajándékozta. A papiruszt egy AHMESZ nevű írnok másolta

Kr. e. 1650 körül egy korábbi eredetiről, ezért AHMESZ papirusznak is nevezik. A moszkvai papiruszt GOLENYISOV orosz kereskedő vásárolta 1893-ban. A Rhind papirusz 84, a moszkvai 25 feladatot tartalmaz. Ezekből 26 geometriai, a többi aritmetikai-algebrai. Indoklások, bizonyítások nincsenek a papiruszokon, csak gyakorlati példák és megoldásaik.

Az egyiptomi hieratikus írást a kutatók sokáig nem tudták megfejteni. Ez végül a francia CHAMPOLLIONnak sikerült a rosette-i kő alapján, amelyet NAPÓLEON zsákmányolt egyiptomi hadjárata során 1799-ben. Ezen a fekete kőtáblán három felírat van görög, hieroglifikus és demotikus írással, de azonos tartalommal. Ismerve a görög írást és a hieroglif képírást meg lehetett fejteni a demotikus és ezen keresztül a hieratikus írást. A papiruszok matematikai elemzését NEUGEBAUER német matematikus végezte el.

A Rhind papirusz egy táblázattal kezdődik, amely tartalmazza a $2/n$ alakú törtek *törzstörtek* (1 számlálójú törtek) összegére bontását minden páratlan n-re 5 és 101 között. A törtek ismerete és használata az egyiptomi aritmetika legfigyelemreméltóbb vonása. A törtek jelölése (2.5. ábra) mutatja az 1/2 különleges szerepét a törtfogalom kialakulásában.

2.5. ábra. *Egyiptomi hieroglif törtek. Rendre:* 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/6, 1/10.

Az 1/2-nek külön jele és elnevezése van minden nyelvben, ami mutatja, hogy nem két szám osztásából, hanem a mérésből származik. A fél, half, polovina stb. elnevezéseknek semmi közük az egy és kettő nevéhez az illető nyelvekben. A törtek már csak azért sem származhattak az osztásból, mert az egyiptomiak nemhogy az osztást, hanem még a szorzást sem ismerték, csak az összeadást. Az 1/2 mellett az egyiptomiak még az 1/3, 2/3, 1/4 és 3/4 törteket tekintették természetes törteknek, valamely egység részeiként. A 2/3 neve „két rész”, az 1/3-é „harmadik rész” volt. Hasonlóan fogták fel az 1/4 és 3/4 törteket is.

Az egyszerű törtek fogalma tehát a mérésből, pontosabban a mérési egység részekre bontásából származott. Ha hosszúság, a térfogat, stb. mérésekor az egység nem pontosan jött ki, akkor a maradék részt kezdetben elhanyagolták. Később számbavették az egység „felét”, nevet és jelet adtak neki. Majd vették ennek felét (1/4) és az egység harmadát. Végül kialakult a tetszőleges törzstörtek, vagyis az egység tetszőleges részekre való osztásának fogalma. A többi törtet a szorzás fogalmának hiánya miatt, nem egy törzstört többszöröseként, hanem törzstörtek összegeként fogták fel. A 2/97 például nem a $2 \cdot 1/97$ szorzat, hanem az alábbi összeg volt náluk:

$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

Érdekes, hogy a

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

felbontásokat nem alkalmazták, hanem az előző példához hasonló bonyolult felbontásokat képeztek. Például:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \ \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}, \ \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{2}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

A kutatók nem tudtak magyarázatot adni arra, hogy miért pont ezeket a felbontásokat használták a sok lehetséges közül. Általános formulát sem találtak a felbontásokra. Egyes típusok képzésében felismerhető bizonyos szabályosság. A legtöbb esetben az $1/n$ törtből kiindulva, sorozatos felezést és harmadolást végeztek. Alkalmazták az alábbi képletet is:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot n}.$$

Ez a módszer világosan követhető a $2/101$ felbontásában. Gyakran indultak ki az $1/2$, $1/3$, $1/4$ természetes törtekből, majd ezeket igyekeztek felezni és harmadolni.

A papiruszon a törzstörtekre bontást egy rövid $n/10$ táblázat követi, ahol n 1-től 9-ig terjed. A táblázatok után feladatok következnek, amelyek közül az első 6 kenyér elosztásával foglalkozik különböző számú ember között. E feladatok megoldásában, miként a továbbiakban is, az ismeretlen szerző alkalmazza a törttáblázatokat. Például hét kenyér elosztása nyolc ember között a

$$\frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

felbontás szerint megy. Így elegendő négy kenyeret félbevágni, két kenyeret negyedelni és egy kenyeret nyolc részre vágni. A vágások száma így kevesebb mint hét kenyeret nyolc–nyolc részre vágni, tehát a megoldás igen gazdaságos, másrészt mutatja, hogy a $7/8$ fogalma nélkül is lehet ilyen feladatokat megoldani. A példából való didaktikai következtetések levonását az olvasóra bízzuk.

Több feladatban a szorzás és osztás összeadásra (kétszerezésre) való visszavezetését látjuk, ami szintén nem tanulság nélküli. A 32-es feladat a $13 \cdot 12$ szorzást számítja ki a következőképpen:

∗ 1	12
2	24
∗ 4	48
∗ 8	96
13	156

Tehát mindig kétszereztek és a csillaggal jelölt részösszegeket összeadták. Ezt az egyiptomi szorzást még a középkorban is tanították Európában a számolótábla segítségével, ami a mai golyós számolójáték őse.

Még érdekesebb az osztás összeadásra való visszavezetése. Nem azt kérdezik, hogy mennyi 45 osztva 5-tel, hanem — „Számolj ötösével míg 45-öt nem kapsz." Megoldás:

1	5*
2	10
4	20
8	40*
9	45

Tehát 9-szer kell számolni 5-ösével, hogy 45-öt kapjunk, vagyis 45-ben az 5 megvan 9-szer. Ha nem egész szám volt az eredmény, akkor a törttáblázatukat hívták segítségül. Például: „Számolj ötösével míg 43-ig jutsz." Megoldás:

1	5
2	10
4	20
8	40*
8	40

Itt azonban maradt még 3. Itt felhasználják a „számolj ötösével míg egyet kapsz" probléma megoldását, vagyis az 1/5 törzstörtet:

*1	$\frac{1}{5}$
*2	$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
3	$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5}$

Tehát:

$$\frac{43}{5} = 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}.$$

Az egyiptomiak ezzel a módszerrel törtet törttel is tudtak szorozni, valamint egészet törttel osztani. Módszerüket például arányos osztásra vezető feladatokban alkalmazták. Ilyen a Rhind papirusz 63. feladata, amely 700 kenyér elosztását kérdezi négy ember között 2/3 : 1/2 : 1/3 : 1/4 arányban. Az arányszámok összege $1\frac{3}{4}$, a 700-at szorozzuk ennek reciprokával ($4/7 = 1/2 + 1/14$), ami 400-at ad. Ennek megfelelő részei adják a megoldást.

Az aritmetikai feladatok mellett egyszerű egyismeretlenes egyenletekre vezető algebrai feladatok is vannak a papiruszon. Ezeket nem algebrai úton oldották meg, hanem a *hamis feltevés módszerével* (hamis helyzet szabályával) aritmetikai úton. Tehát az algebrai absztrakciós szintről visszamentek az aritmetikai szintre. Lássuk ezt a módszert a Rhind papirusz 26-os feladatán: „Egy sokaság és negyede összesen tizenöt, mennyi a sokaság?"

Vegyünk egy próbamegoldást, vagyis tegyünk egy valószínűleg hamis feltevést. Legyen a sokaság 4, mert ennek könnyű a negyedét venni. Negyede 1, ez összesen 5. De minthogy az 5-öt 3-szor kell venni, hogy a kívánt 15 összeget kapjuk, ezért a 4-et is háromszor kell venni. Tehát a sokaság 12.

A műveletek rögzítése a próbálgatások során rávezetheti a gyereket az egyenlet struktúrájára, majd az egyenlet felállítására:

$$4 + \frac{1}{4} = 5 \implies x + \frac{x}{4} = 15.$$

A hamis feltevés szabályát a mai elektrotechnika is alkalmazza. Ha egy hálózatban keresett az áram adott feszültség mellett, akkor sokszor könnyebb úgy megoldani a feladatot, hogy az áram értékére valamilyen számot felveszünk.

Ez az egyiptomi egyenletmegoldási módszer *regula falsi* néven a régi didaktika fontos része volt. Ösztönösen ma is sok tanár alkalmazza a „könnyebb számokkal, mint x-szel" elvet követve.

A Rhind papiruszon van egy mértani sorozatra utaló játékos feladat is, amely sok későbbi feladatgyűjteményben és népi találóskérdésben felbukkan: 7 ház, 49 macska, 343 egér, 2 401 kalász, 16 807 búzazem, összesen: 19 607. A papirusz nem közli a feladat szövegét, de a számokból könnyű kitalálni.

A feladat megtalálható az első magyar aritmetikában is némi változtatással. Népi tréfás változata a következő: „Jankó elment Piripócsra. Találkozott három tóttal. Minden tótnak három zsákja, minden zsákban három macska. Hányan mentek Piripócsra?"

Az ismertetett aritmetikai-algebrai eredmények mellett az egyiptomi matematikára mégis a *geometriai* jelleg a jellemző. A görögök Egyiptomot tartották a geometria bölcsőjének. Démokritosz szerint azért született Egyiptomban a geometria, mert a Nílus évi áradása után újra kellett mérni a földeket (geometria= földmérés).

Az egyiptomi geometria és csillagászat fejlettségének máig élő bizonyítékai a piramisok és templomok. A piramisok két éle mindig észak-déli irányú, igen kis eltéréssel; alakjuk pedig szabályos négyoldalú csonkagúla. Ezeket nehéz gyakorlati szükségszerűséggel magyarázni, inkább kultikus előírásokra utalnak.

Ki tudták számítani a téglalapok területét. A háromszögek, trapézok területét átdarabolással téglalapra vezették vissza. Ezt a körnél is megkísérelték. A Rhind papirusz 50. feladatában Ahmesz azt állítja, hogy egy 9 átmérőjű köralakú mező területe ugyanannyi, mint egy 8 oldalú négyzeté, tehát $4,5^2\pi = 64$. Innen $\pi = 256/81 = 3.166\ldots$, ami jó közelítés. Egy másik feladatban ezt az eredményt más úton kapta: a körbe írható szabályos nyolcszög segítségével.

A π egyiptomi közelítése jóval pontosabb az addigi 3-as értéknél, ami abból adódott, hogy a kör kerületét az átmérő háromszorosának vették. Ez a régi megfigyelés a *Bibliában* is szerepel:

> *És csinála egy öntött tengert, mely egyik szélétől fogva a másik széléig tíz sing volt, köröskörül kerek, és öt sing magas, és a kerületit harmincz sing zsinór érte vala körül.*
>
> *(Királyok I. könyve, 7.23.)*

Az egyiptomiak tudták azt, hogy a 3,4,5 oldalú háromszög derékszögű. A „kötélfeszítők" ezt használták derékszög kijelölésére földmérésnél és templomok, oltárok stb. építésénél. Ez nem jelenti azt, hogy ismerték a Pitagorasz-tételt, csak konkrét esetben felismerték és alkalmazták.

Legkiemelkedőbb geometriai eredményük az, hogy ki tudták számítani a négyzetes csonkagúla térfogatát a helyes

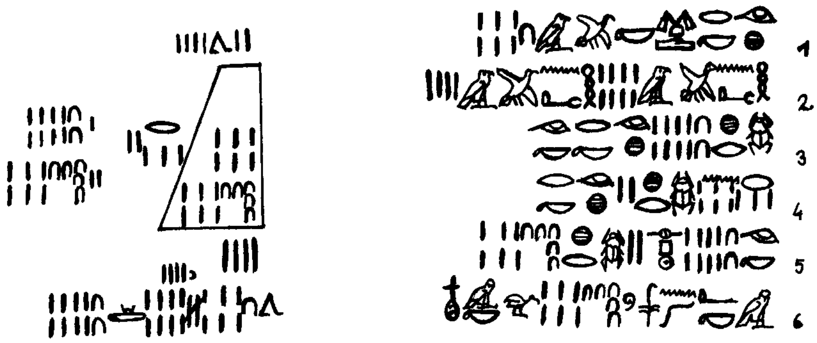
$$V = \frac{m}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

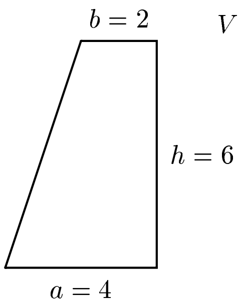
képlettel. Ezt a moszkvai papirusz 14-es feladata mutatja (2.6. ábra).

A megoldási utasítás szószerinti fordítása soronként a következő:

1. Add össze ezt a 16-ot
2. ezzel a 8-cal és ezzel a 4-gyel
3. Kijön 28. Számítsd ki
4. egyharmadát a 6-nak. Kijön 2. Szám-
5. lálj 28-asával kétszer. Kijön 56.
6. Nézd, ez 56. Jól számoltál.

Végezetül ismertetjük az *egyiptomi naptárt*, mert ez a mai naptárunk őse. Időszámításuk valószínűleg abból indult ki, hogy a Nílus évi áradása mindig röviddel azután kezdődött, hogy a Sziriusz a (kutyacsillag) éppen napfelkelte előtt jelent meg Keleten. Két megjelenés közt éppen 365 nap van, ezért az évet tizenkét harminc napos hónapra osztották, megtoldva öt ünnepnappal. Az év, vagyis egy teljes napciklus azonban 365,25 nap, így évente negyed nap eltolódás keletkezik, ami 1460 év után áll vissza. Egy római tudós feljegyzése szerint a naptár Kr. e. 139-ben szinkronban volt, így a naptár kezdete három ciklussal korábbra Kr. e. 4241-re (pontosabb számítások szerint Kr. e. 4228-ra) datálható. Az egyiptomi naptárt Julius Caesar római uralkodó reformáltatta meg, minden negyedik évben egy szökőnap hozzávételeivel és a hónapok napjainak megváltoztatásával. Ez a julianus naptár volt érvényben Európában a XVI. század végéig, Oroszországban viszont az 1917-es forradalomig. Ezért esett október 25-e november 7-re. A mai ún. gregoriánus naptár Gergely pápa reformjának eredménye.





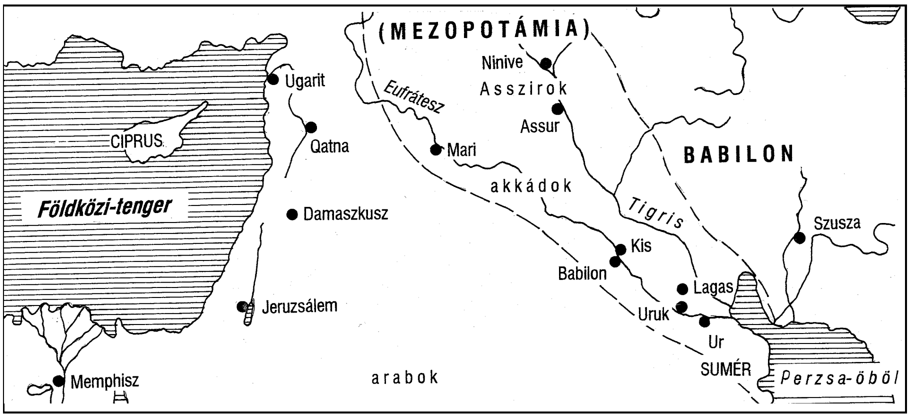
$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= \frac{6}{3}(16 + 8 + 4) = 2 \cdot 28 = 56$$

2.6. ábra. *Fenn: a csonkagúla térfogatának kiszámítása a moszkvai papiruszon. Alul: a számítások magyarázata.*

2.4. A babilóniai matematika

A matematika fejlődésében még Egyiptomnál is fontosabb szerepet játszott a másik nagy folyammenti civilizáció a Tigris és Eufrátesz folyók mentén, illetve között. A területet szokták Mezopotámia (folyamköz) néven is emlegetni (2.7. ábra). Egyiptom és Babilónia adottságaiban sok a hasonlóság, de lényeges különbségek is vannak. Babilónia területe nyitott, ezért sok hódító váltotta egymást e tájon. Kövek és papirusznád nincs, de sok az agyag. Épületek nem maradtak fenn, viszont rengeteg kiégetett ékírásos agyagtábla vészelte át az idő viszontagságait. Geometriai jelleg helyett a babilóniai matematikában az *aritmetikai-algebrai* jelleg dominált.

A termékeny folyótorkolatok vidékén az első kultúrnép a sumér volt Kr. e. 4000 körül, akik megalapították első városaikat (Ur, Uruk, Kis), csatornákat építettek az öntözéshez és az áradások megfékezésére. A sumér mitológiában is szerepel egy, a bibliai vízözönhöz hasonló nagy áradás, valamint a teremtés



2.7. ábra. *Babilónia (Mezopotámia) térképe.*

leírása is megegyezik. A *Biblia* szerint Ábrahám, a zsidók és arabok (tágabb értelemben a sémi népek) közös ősapja a sumér Úr városából jött. A sumér nyelv ismeretlen eredetű, különbözik a környező népekétől és ragozó nyelv, mint a magyar. Ez az egyik alapja a sumér-magyar rokonság elméletének, amely az itthoni hivatalos tiltás miatt főleg az emigrációban kapott publicitást. Sok kutató a sumér képírást tartja minden írás ősének.

A sumérok fontos kultúrtörténeti szerepe egyre jobban megvilágosodik a kutatások előrehaladtával. Sok, korábban a görögöknek tulajdonított eredménynek kimutatták mezopotámiai eredetét. Néhány kutató egyenesen azt állítja, hogy a civilizáció a sumérokkal kezdődött.

A sumér városokat Kr. e. 2400 körül a sémi eredetű akkádok, majd a szintén sémi amoriták (amurruk) hódították meg. A hódítók (a későbbiek is) átvették a sumérok fejlettebb kultúráját, a tudományban megmaradt a sumér nyelv, így biztosítva volt egyfajta kulturális folyamatosság a térségben.

Az amoriták hozták létre az óbabiloni birodalmat, amely nevét Babilon várostól kapta. Fénykorát e birodalom HAMMURÁBI (Kr. e. 1728–1686) uralkodása idején élte.

Az óbabiloni birodalomnak az asszír hódítás vetett véget a Kr. e. XIII. században. Az asszír birodalom fővárosa Ninive volt. Itt tárták fel az angolok az asszír uralkodók több mint 150 000 agyagtáblából álló könyvtárát.

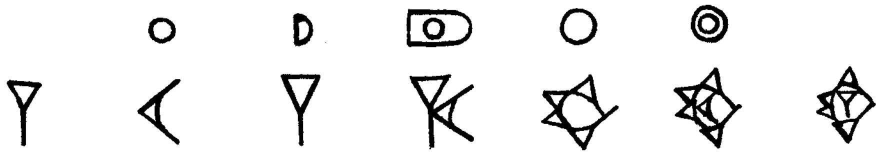
A terület újabb urai a kaldeusok (káldok) lettek a Kr. e. VII. században. Az elpusztított Ninive helyett ismét Babilon lett a főváros és létrejött az újbabiloni birodalom. Ennek legnagyobb uralkodója NABUKODONOZOR volt, aki támogatta a tudományok, elsősorban a csillagászat művelését. A kaldeusok osztották be a Nap látszólagos pályáját (az ekliktikát) tizenkét állatövre és neveiket is ők adták. Ezzel megalapozták a horoszkópia „tudományát” is.

A kaldeusok után a méd és perzsa hódítás következett. Végül a perzsákat legyőző NAGY SÁNDOR tett pontot Babilónia történetének végére.

Megjegyezzük, hogy a Bibliában nemcsak Egyiptom szerepel, hanem gyakran találkozhatunk babilóniai városok és uralkodók neveivel is. Az egyiptomi rabság mellett a zsidók ugyanis többször szenvedtek babilóniai rabságot.

Az ékírásos agyagtáblákból a régészek több, mint 450 000-et hoztak felszínre, amelyek közül kb. 250 matematikai jellegű. Az ékírás megfejtésében szintén egy háromnyelvű kőtábla segített, az ún. behisztuni kő. A tábla óperzsa, elámi és babiloni (akkád) szövegéből a német GROTEFEND és az angol RAWLINSON hámozta ki az ékírásos jelek értelmét. A matematikai táblák elemzését NEUGEBAUER és a holland VAN DER WAERDEN végezte el.

A sumérok kezdetben kerek írónáddal nyomták írásjeleiket az agyagba és valószínűleg hatos számrendszert használtak. Az első írásos emlékek már a tízes és hatvanas számrendszerek keveredését mutatják nem helyiértékes számírásban. A kerek írónáddal kisebb-nagyobb köröket, illetve félköröket lehetett a puha agyagba nyomni (a megőrzésre szántakat ezután kiégették). Később az írónádat a háromszögletű írópálca váltotta fel, amivel álló és fekvő ékeket lehetett az agyagba nyomni. Így alakult ki az ékírás. Az ósumér számjegyek és az ékírás kezdeti formái a helyiértékrendszer csíráit mutatják (2.8. ábra).



2.8. ábra. *Ósumér számjegyek. Rendre: 1, 10, 60,* $10\cdot 60$, 60^2, $10\cdot 60^2$, 60^3.

A babilóniaik ezt teljes értékű *hatvanas számrendszerré* fejlesztették, amely kiterjedt a hatvanados törtekre is. Az álló ék (1) és a fekvő ék (10) jelével így bármilyen számot le tudtak írni. Hiányzott az egyértelműséghez a hatvanados vessző és a nulla. A nullára később bevezettek egy speciális jelet helypótlóként, de a szám végén nem tették ki, így a számok kiolvasása ezután sem volt egyértelmű, csak a szövegösszefüggésből lehetett behatárolni értéküket. Tekintsük például a 2.9. ábra szerinti számot! Ez a szám egyaránt jelölhetett

$$1\cdot 60^2+0\cdot 60+4=1;\overset{\overset{60}{\smile}}{0},4=3604\text{-et},$$

vagy

$$1\cdot\frac{1}{60}+0\cdot\frac{1}{60^2}+4\cdot\frac{1}{60^3}=0;\overset{\overset{60}{\smile}}{1},0,4=\frac{3604}{60^3}\text{-t}$$

és így tovább.

2.9. ábra. *Egy szám felírása babiloni ékírásban: 1, 0, 4.*

A helyiérték elvének a törtekre való alkalmazása a babilóniai matematika nagy teljesítménye. A hatvanados törtek túlélték a hatvanas számrendszert. Európában csak a XVII. században szorították ki őket a tizedes törtek, holott egész számokra régen a tízes számrendszert használták.

Van der Waerden három kérdést tesz fel könyvében a babilóniaiak számírásával kapcsolatban:

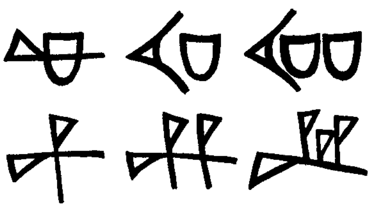
1. Hogyan jutott eszükbe 1 és 10 után éppen 60-at választani következő lépcsőfoknak?

2. Hogyan jutott eszükbe 60-at „nagy egyes"-nek tekinteni, és az 1 jelével ábrázolni?

3. Hogyan jutott eszükbe, hogy a törteket is 60-as számrendszerben írják, $1/60$-at „kis egység"-nek fogva fel?

Az első kérdésre két valószínűsíthető válasz is van. A hatvanas rendszer a sumér hatos és az akkád tízes számrendszer egyesítéséből jöhetett létre. Mások a sumér és akkád súly, illetve pénzegységek átszámítási számaiból származtatják. A második és harmadik kérdésre azonban egyik sem szolgál magyarázatul.

Az egyszerű törtek neve és jele itt is mutatja, hogy a törtek nem az osztásból, hanem a mérésből származtak. Az $1/2$ jele valami felezésére utal. Képírásos jelentése valóban az: olyan edényt jelent, amelynek térfogatát felezték (2.10. ábra).



2.10. ábra. *Sumér és babilóniai törtek. A felső sorban: régebbi sumer kori. Az alsó sorban: újabb sumer kori. A törtek rendre:* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

A babilóniaiak számításaikat táblázatok segítségével végezték. Voltak reciprok, szorzás, négyzet, négyzetgyök, köb és köbgyök táblázataik. Volt egy n^3+n^2 táblázatuk is, ami fontos szerepet játszott algebrájukban.

Szorozni tudtak, az osztást a reciproktáblázat segítségével szorzásra vezették vissza. Csak olyan számok reciprokait képezték, amelyek véges hatvanados törteket adtak, vagyis amely számok prímtényezős felbontásában csak a 60 prímtényezői fordulhattak elő. Az ilyen számokat szabályosaknak nevezték. Például:

$$\frac{1}{600} = \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2} = \frac{2 \cdot 3}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \frac{6}{60^2}.$$

Egy osztás ezután így végezhető el:

$$\frac{91}{600} = 91 \cdot \frac{1}{600} = 91 \cdot \frac{6}{60^2} = \frac{9 \cdot 60 + 6}{60^2} = \frac{9}{60} + \frac{6}{60^2}.$$

A szorzás ilyen módja mutatja, hogy a törtfogalom fejlődésében egy lépéssel előbbre tartottak, mint az egyiptomiak. Valamely tetszőleges számlálójú törtet nem törzstörtek összegeként, hanem egy törzstört többszöröseként fogták fel. Két szám hányadosaként azonban még nem értelmezték.

Algebrai ismereteik is fejlettebbek voltak az egyiptomiakénál. Meg tudtak oldani másodfokú egyenleteket és egyenletrendszereket. A megoldás során alkalmazták az $(a \pm b)^2$ és $a^2 - b^2$ kifejezésekre ismert azonosságokat. Ez nem azt jelenti, hogy ezeket általánosan fel tudták volna írni, pláne bizonyítani. Maga a megoldás is receptszerű volt. Például: „Területhez add hozzá az oldal kétszeresét, ez 35. Mennyi az oldal?” ($x^2 + 2x = 35$) „Adj 35-höz 1-et, ez 36. 36 az $6 \cdot 6$. Vegyél el 1-et, az oldal 5.” Valóban:

$$x^2 + 2x + 1 = 35 + 1 \implies (x+1)(x+1) = 6 \cdot 6 \implies x + 1 = 6 \implies x = 5.$$

Negatív gyökökről, vagy az ismeretlen betűvel jelöléséről természetesen szó sem lehetett. Annál is inkább, mert sem a negatív szám fogalma nem alakult még ki, sem az ábécét nem találták még fel.

Nézzünk egy egyenletrendszerre vezető feladatot. Megoldása során a babilóniaiak is alkalmazták a hamis feltevés egyiptomi módszerét.

Feladat: *1 búr (1800 sar) területről 4 gúr (1200 sila) gabonát arattam. Egy másik búrról 3 gúr (900 sila) gabonát arattam. A gabona 8;20 (500) silával haladja meg a gabonát. A földjeimet összeadva 30 (1800) sart kapok. Mekkorák a földjeim?*

Mai jelölésekkel az alábbi két egyenlet írható fel:

$$x + y = 1800$$
$$\frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500,$$

$$x = 600,\ y = 1200.$$

A babilóniai megoldás: Törd az 1800-at, a földek területének összegét ketté: 900. Végy tehát 900-at és még 900-at (x-nek és y-nak). Ekkor a jó (az első) földön $2/3 \cdot 900 = 600$ sila, a rossz (a második) földön $1/2 \cdot 900 = 450$ sila gabona terem. A különbség 150 sila lenne. De a különbségnek 500-nak kell lenni, tehát a 150-et 350-nel növelni kell. Ha a jó földet 1 sarral növeljük, a rosszat 1 sarral csökkentjük, akkor a termés nő 2/3 silával, illetve csökken 1/2 silával, vagyis a terméskülönbség $2/3 + 1/2 = 7/6$ sila. Mit kell 7/6-dal szoroznom, hogy megkapjam a 350-et? Végy 300-at, mert 300-szor 7/6 az 350. Így a jó föld 900-ról 1200 sarra szaporodik, és a rosszabb 900-ról 600-ra csökken: $y = 1200$, $x = 600$.

Másodfokú egyenletrendszert azonosságok ügyes alkalmazásával oldottak meg:

Feladat: A szélesség meg a hosszúság 30. A terület 221. Mekkora a szélesség és a hosszúság?

Törd a 30-at ketté: 15. A 15-ször 15 egyenlő 225-tel. Vond ki ebből a területet. 225-ből 221 az 4. Négyzetgyöke 4-nek: 2. Add ezt 15-höz: 17. Megkaptad a hosszúságot. Vond ki a 2-őt a 15-ből: 13. Ez a szélesség. Mai jelölésekkel: $x + y = 30$, $x \cdot y = 221 \implies$

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2} &= 15\\
\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &= 225\\
\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 &= 225 - 221 = 4\\
\frac{x-y}{2} &= 2\\
\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} &= x = 15 + 2 = 17\\
\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} &= y = 15 - 2 = 13.
\end{aligned}$$

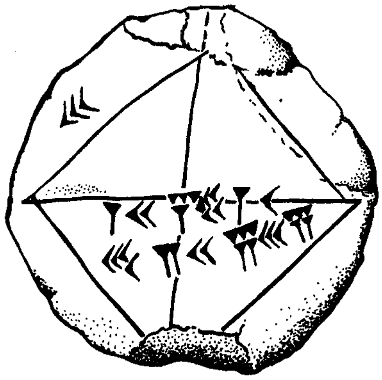
Az azonosságokkal meg nem oldható másodfokú egyenleteket a megoldóképlet receptszerű alkalmazásával oldották meg. A negatív számok hiánya miatt külön „recept" volt az $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$, $x^2 + q = px$ típusokra. Más feladatokat ezekre a típusokra vezettek vissza ügyes helyettesítésekkel. Például:

$$11x^2 + 7x = 6;15 \implies (11x)^2 + 7 \cdot (11x) = 1,8;45.$$

A harmadfokú egyenletek közül az $x^3 + x^2 = p$ alakúra visszavezethetőket tudták megoldani a megfelelő táblázat segítségével. Megoldásaikat próbának vetették alá, ami fontos lépés a bizonyítási igény kialakulása felé.

A babilóniai algebra egyik csúcsteljesítménye a $\sqrt{2}$ pontos megközelítése iterációval. Az amerikai Yale egyetem gyűjteményének 7289-es számú agyagtábláján olvasható az alábbi közelítés (2.11. ábra):

$$1;24,51,10 = 1,414222,$$



2.11. ábra. *A „Yale 7289" tábla a $\sqrt{2}$ közelítésével.*

ami 5 számjegyig pontos. Balra fent az oldal hossza olvasható (30), az átlóra a $\sqrt{2}$ értéke, alul pedig az átló hossza $(30 \cdot \sqrt{2})$: $42; 25; 35$ van írva.

A négyzetgyök számítására alkalmazott közelítő módszerük a newtoni iterációhoz hasonló volt. Legyen $x = \sqrt{2}$. Abból indultak ki, hogy ha az első közelítés (x_1) túl kicsi a $\sqrt{2}$ -höz képest, akkor $2/x_1$ túl nagy, és viszont. Ekkor számtani közepük már elég jó közelítés. Például:

$$x_1 = 1,5 \quad \frac{2}{x_1} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3} \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) \approx 1,415.$$

Már ez a közelítés is két jegyre pontos. Az eljárás folytatásával tetszőleges közelítést érhetünk el. Ha ezt a módszert az $a^2 + b$ összeg négyzetgyökének kiszámítására alkalmazzuk, akkor a

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

közelítő képlethez jutunk, amit szintén használnak babilóniai szövegekben.

A babilóniai geometriát sokáig sokkal fejletlenebbnek tartották az egyiptominál. A legújabb leletek ezt cáfolják. Az aritmetikai-algebrai jelleget azonban nem, mert a geometriai eredmények is algebrai köntösben jelentek meg.

Ismerték a Thalész-tételt. Helyes területképletük volt nemcsak a sokszögekre, hanem a körre is:

$$\text{terület} = \frac{1}{2} \cdot (\text{kerület} \cdot \text{sugár}) = \frac{k \cdot r}{2}.$$

Erre a kör cikkekre osztásával és kiterítésével jöttek rá. Így a kör területe egy K alapú és r magasságú téglalap területének feleként adódik.