CHARLES SEIFE

NULLA

KÜLÖNLEGES SZÁMOK NYOMÁBAN

SOROZATSZERKESZTŐ ◆ BOKOR NÁNDOR

NULLA

CHARLES SEIFE

EGY VESZÉLYES GONDOLAT TÖRTÉNETE

FORDÍTOTTA KEPES JÁNOS

TYPOTEX

A könyv megjelenését a Nemzeti Kulturális Alap a kiadói program keretében támogatta.

Nemzeti Kulturális Alap

Lektorálta
Dr. Bokor Nándor

ISBN 978 963 493 297 0
ISSN 3004-2208

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesületének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Mandl Orsolya
Tördelés: Szabó Attila József
Borítóterv: Somogyi Péter
Nyomta és kötötte: OOK-PRESS Nyomda, Veszprém
Felelős vezető: Szathmáry Attila

Tartalom

0
A NULLA ÉS AZ ÜRESSÉG

A *Yorktown* amerikai hadihajót úgy eltrafálta a nulla, mint valami torpedó.

Az egymilliárd dolláros rakétahordozó 1997. szeptember 21-én Virginia partvidékén cirkált, amikor egyszer csak hatalmas zökkenéssel leállt. Élettelenül lebegett a víz színén.

A hadihajókat úgy tervezik, hogy kibírják egy torpedó becsapódását vagy egy akna felrobbanását. Páncélburkolata megvédte a *Yorktown*t a fegyverektől, de arra senki nem gondolt, hogy a nullával szemben is fel kell vértezni. Súlyos hiba volt.

A *Yorktown* számítógépei új hajtóművezérlő szoftvert kaptak. Sajnos senki nem szúrta ki a kódban lappangó időzített bombát, egy nullát, amelyet a szoftvert telepítő mérnököknek törölniük kellett volna. Ki tudja, miért, elnézték, a nulla benne maradt a kódban. Észrevétlenül. Egészen addig, amíg a szoftver be nem töltötte a memóriába – és rögtön le nem fagyott.

A *Yorktown* számítógépes rendszere nullával próbált osztani, mire a 80 ezer lóerő azonnal hasznavehetetlenné vált. Majdnem három óra kellett hozzá, hogy vészhelyzeti vezérlésre tudják kapcsolni a hajtóműveket, és a *Yorktown* bevánszoroghasson a kikötőbe. Két napba telt, mire a mérnökök rendbe hozták a hajtóműveket, és ismét harcképessé tették a hajót.

Nincs még egy olyan szám, amely ekkora bajt tudna okozni. És a *Yorktown*ra lesújtó számítógép-leállás csak ízelítője volt annak, hogy mi mindenre képes a nulla. Egész kultúrák vértezték fel magukat ellene, filozófiák omlottak össze a súlya alatt, mert a nulla teljesen más, mint a többi szám. Mert bepillantást enged a megnevezhetetlenbe és a végtelenbe. Ezért aztán rettegtek tőle, gyűlölték – és betiltották.

Ez a történet a nulláról szól: hogyan született meg az ókorban, növekedett és gyarapodott Keleten, küzdött az elismeréséért Európában, vált uralkodóvá Nyugaton, és jelent azóta is szüntelen fenyegetést a modern fizikában. Olyan emberek története, akik egymással csatáztak a titokzatos szám értelme fölött – írástudók és misztikusok, tudósok és papok –, akik mind próbálták megfejteni a nullát. Annak a története, ahogy a nyugati világ hasztalan (és olykor hevesen) próbálta megvédeni magát ettől a keleti fogalomtól. És hogy milyen paradoxonokat vetett fel ez az ártatlannak tűnő szám, amelyek századunk legragyogóbb elméit is megrémítették, mert azzal fenyegettek, hogy romba döntik a tudományos gondolkodás egész keretrendszerét.

A nulla ereje abban rejlik, hogy a végtelen ikertestvére. Egyformák és ellentétesek, jin és jang. Egyaránt ellentmondásosak, zavarba ejtők. A tudomány és a vallás legnagyobb kérdései közé tartozik a semmi és az örökkévalóság, az üresség és a határtalan, a nulla és a végtelen. A nulla körüli csetepatékból támadó csaták megrengették a filozófia, a tudomány, a matematika és a vallás alapjait. Minden forradalom mélyén egy nulla – és egy végtelen – bújt meg.

A nulla körül összecsapások folytak a Kelet és a Nyugat között. A vallás és tudomány küzdelmének középpontjában állt. Közben a természet nyelve lett, egyben a matematika legfontosabb eszköze. A fizika legmélyebb problémái – a fekete lyuk sötétlő magva és az ősrobbanás vakító villanása – mind a nulla legyőzéséért folyó küzdelem.

A nulla azonban egész története során, minden elutasítás és száműzetés dacára, mindig legyőzte a vele szemben állókat. Az emberiség soha nem tudta beleilleszteni a filozófiáiba. Inkább a nulla formálta az emberiség a világról – és Istenről – alkotott képét.

1
SEMMI SZÍN ALATT
A nulla eredete

Nemlétező és létező se volt még.
Nem volt ég, és az égen túl a menny sem.
Mi mozdult, kinek oltalmában és hol?[1]

Rigvéda

A nulla története ősidőkbe nyúlik vissza, gyökerei a matematika kezdetekor eredtek, több ezer évvel az első civilizációk előtt, jóval korábban, mint hogy az emberek írni-olvasni tudtak. De amilyen természetesnek tűnik ma számunkra a nulla, az ősi emberek számára idegen – és félelmetes – gondolat volt. A nulla, ez az évszázadokkal Krisztus születése előtt létrejött, a termékeny félhold területén született keleti fogalom nemcsak az őseredeti üresség képeit idézi fel, de veszedelmes matematikai tulajdonságokkal is rendelkezik. Akár a logika egész rendszerét képes szétzúzni.

A matematikai gondolkodás kezdetei abból az igyekezetből fakadtak, hogy az emberek megszámolják a birkáikat, számontartsák a vagyonukat és az idő múlását. Ezek a feladatok nem kívánták meg a nullát, a civilizációk évezredeken át tökéletesen működtek anélkül, hogy felfedezték volna. Mi több, egyes kultúrák számára annyira rémisztőnek tűnt, hogy inkább úgy döntöttek, meglesznek nélküle.

Élet a nulla nélkül

A nullának pont az a lényege, hogy a hétköznapi életben nincs rá szükség. Senki nem indul el nulla halat vásárolni. Bizonyos értelemben a legcivilizáltabb az összes tőszám közül, használatára csak a kifinomult gondolkodás szükségletei kényszerítenek rá.

Alfred North Whitehead

A mai ember éppoly nehezen tudja elképzelni az életet nulla nélkül, mint ha a 7-es vagy 31-es szám hiányozna. Volt azonban idő, amikor a nulla nem létezett – ahogy 7-es és 31-es sem. Ez még a történelem kezdete előtt volt, így a paleontológusoknak kő- és csontdarabokból kellett összeilleszteniük a matematika születésének krónikáját. Ezekből a töredékekből kiderítették, hogy a kőkorszaki matematikusok némileg kezdetlegesebbek voltak a maiaknál. Például tábla helyett farkasokat használtak.

A kőkorszaki matematika megismerésének egyik kulcsa az 1930-as évek végén került napvilágra. Karel Absolon régész, miközben éppen átszitálta Csehszlovákia talaját, talált egy harmincezer éves farkascsontot, amelybe egy csomó rovátkát véstek. Senki nem tudja, hogy ezen a csonton Frédi, a barlangi ősember vajon az elejtett szarvasokat, az elkészült rajzokat vagy a legutóbbi mosakodás óta eltelt napokat tartotta nyilván. Annyi viszont teljesen világos, hogy ezek az ősemberek itt valamit számoltak.

A kőkorszakban egy farkascsont szuperszámítógéppel ért fel. Frédi elődei kettőig sem tudtak számolni, egész biztos, hogy semmi szükségük nem volt a nullára. Az ember a matematika kezdetén valószínűleg csak *egy* és *sok* között tudott különbséget tenni. A barlanglakónak egy vagy több lándzsahegye volt, egy vagy több összezúzott gyíkot evett meg. Az egy és a sok kivételével semmilyen mennyiséget nem állt módjában kifejezni. A primitív nyelvek fejlődése idővel eljutott az *egy, kettő* és *sok,* később az *egy, kettő, három* és *sok* megkülönböztetéséig, de ennél nagyobb számokra már nem volt szavuk. Egyes nyelvek még ma is ilyen nehézséggel küzdenek. A bolíviai sziriona indiánoknak és a brazíliai janoamáknak nincs szavuk semmire, ami háromnál több, ezekre a „sok” szót alkalmazzák.

A számok valóságos természetének köszönhetően – miután összeadásukkal további számokat kapunk – a számrendszer nem állt meg háromnál. Egy idő után az eszes törzstagok összekapcsolták a számjelölő szavakat, így további számokat kaptak. A brazíliai bakairi és bororo népek mai nyelve működés közben mutatja be ezt a folyamatot. Ilyen számrendszert használnak: „egy”, „kettő”, „kettő meg egy”, „kettő meg kettő”, „kettő meg kettő meg egy” és így tovább. Kettesével számolnak. A matematikusok ezt *bináris* rendszernek nevezik.

Nem sok nép van, amely a bakairikhoz és bororókhoz hasonlóan kettesével számol. A régi farkascsont inkább jellemző az ősi számolási rendszerekre. Frédi farkascsontján 55 kis rovátka látható, ötös csoportokba rendezve, és az első 25 jel után áll egy második rovátka is. Nagyon úgy fest a dolog, hogy Frédi ötösével strigulázott, majd megszámolta az ötös csoportokat alkotó csomagokat. Nagyon értelmes dolog. Sokkal gyorsabban lehet strigulázni a csoportosított jeleket, mint ha egyesével számolnánk meg őket. A mai matematikusok úgy mondanák: Frédi, a farkascsontfaragó *ötös* számrendszert használt.

De miért éppen ötöst? Ez lényegében önkényes döntés. Ha Frédi négyes csoportokat striguláz, majd a négyes és 16-os csoportokat számolja meg, a számrendszer éppoly jól működött volna, mint hatos és 36-os csoportokkal. A csoportosítás nem befolyásolja a csonton levő rovátkák számát, csak hogy a végén Frédi hogyan strigulázza őket – de akárhogy is számol, mindig ugyanazt az eredményt kapja. Frédi azonban szívesebben számolt ötös, mint négyes csoportokban, de világszerte sok más népnek is hasonló az ízlése. A természet véletlen játéka, hogy az embernek öt ujjat adott mindkét kezén, de ennek következtében, úgy tűnik, számos kultúra kedveli az ötös számrendszert. Például a régi görögök „ötözés” szóval jelölték a strigulázás módszerét.

A nyelvészek még a dél-amerikai bináris számolási rendszerben is felfedezték egy ötös számrendszer első nyomait. Bororo nyelven a „kettő meg kettő meg egy”-re van egy másik kifejezés is: „amennyi az egész kezem”. Jól látszik, hogy az ősi népek szívesen számoltak a testrészeikkel, így lett kedvencük az öt (egy kéz), tíz (mindkét kéz) és húsz (mindkét kéz meg mindkét láb). Az angol *eleven* (tizenegy) és *twelve* (tizenkettő) szó valószínűleg a „tíz felett egy” és „tíz felett kettő” alakokból fejlődött ki, a tizenhárom, tizennégy, tizenöt és a többi pedig egyszerűen a „tíz meg három”, „tíz meg négy”, „tíz meg öt” stb. összevonása. A nyelvészek ebből azt a következtetést vonták le, hogy tíz volt az alapvető egység azokban a germán protonyelvekben, amelyekből az angol is eredt, ezek a népek tehát tízes számrendszert használtak. Másfelől franciául a nyolcvan *quatre-vingts* (négy húsz), a kilencven pedig *quatre-vingt-dix* (négy húsz meg tíz). Ez arra utalhat, hogy a mai Franciaország területén élő népek *húszas* számrendszert használtak. Mindezekben a számrendszerekben – akár ötös, akár tízes, akár húszas – megvolt a 7, a 31 és a többi hasonló szám is. A nullára azonban egyik rendszernek sem volt szava. Ez a fogalom egyszerűen nem létezett.

Nem kell számontartanunk nulla birkát vagy megszámlálni a nulla gyerekünket. A zöldséges nem azt mondja, hogy „nulla banánunk van”, hanem hogy „nincs banán”. Nem kell szám ahhoz, hogy valaminek a hiányát kifejezzük, senkinek nem is jutott eszébe egy jelet rendelni a dolgok hiányához. Ezért boldogultak az emberek olyan sokáig a nulla nélkül. Egyszerűen nem volt rá szükség. A nulla szóba sem került.

A történelem előtti időkben éppenséggel már az is különleges képességnek számított, ha valaki hallott a számokról. Ha számolni tudott, azt olyan misztikus, felfoghatatlan csodának tartották, mintha varázsolni tudna, vagy személyesen ismerné az isteneket. Az *Egyiptomi halottaskönyv*ben Aken, a révész, mielőtt átvinné a folyón az eltávozott lelkeket az Alvilágba, kifaggatja őket: senkit nem vesz fel a fedélzetre, aki „nem ismeri az ujjai számát". A révész kívánságára a léleknek egy számlálórigmussal még le is kell számlálnia az ujjait. (A görög révész ezzel szemben csak a halott nyelve alá dugott pénzt kívánta meg.)

Bár az ókori világban ritka volt a számolás képessége, a számok és a számolás alapjai mindig létrejöttek már az írás-olvasás előtt is. Amikor az ősi civilizációk először nyomtak nádat az agyagtáblába, véstek kőbe számokat, mázoltak tintát a pergamenre és papiruszra, már meglehetősen kialakult számrendszerek léteztek. A kimondott számokat írott alakban kifejezni már egyszerű feladat volt: csak olyan kódolási rendszert kellett kitalálni, amelyben az írástudók időtállóbb formába önthették a számokat. (Egyes társadalmak már azelőtt kiötölték a módját, hogy az írást felfedezték volna. Például az írástudatlan inkák kipukkal, csomózott színes kötelekkel rögzítették a számításaikat.)

Az első írástudók a számrendszerük szerint írták le a számokat, és mint sejthetjük, az általuk elképzelhető legtömörebb módon. Frédi korához képest fejlődött a társadalom. Az írástudók nem újabb és újabb kis csoportokat alkottak a jelekből, hanem mindegyik csoportosításra más jelet használtak. Ötös számrendszerben egy bizonyos jelet az egyre, egy másikat az ötös csoportokra, egy harmadikat a huszonötös csoportokra és így tovább.

Pontosan így jártak el az egyiptomiak is. Az ókori egyiptomiak több mint 5000 évvel ezelőtt, még a piramisok ideje előtt, olyan rendszert találtak ki tízes számrendszerük jelölésére, amelyben a számok helyett képek szerepeltek. Függőleges vonás ábrázolta az egységet, egy sarokcsont a 10-et, tekergő kígyó a 100-at és így tovább. Ebben a rendszerben egy szám leírásához az egyiptomi írástudónak csak ezekből a szimbólumokból kellett csoportokat képeznie. A „százhuszonhárom" szám leírásához nem 123 pipát kellett lejegyezniük, hanem csak hat szimbólumot: egy kígyót, két sarokcsontot és három függőleges vonást. Ez volt a matematika művelésének jellemző módja az ókorban. És a többi civilizációhoz hasonlóan az egyiptomiaknál sem volt nulla – nem volt szükségük rá.

Pedig az ókori egyiptomiak igen tapasztalt matematikusok voltak. Emellett kiváló csillagászok és időmérők, ami a naptár változó jellegének köszönhetően fejlett matematikai tudást feltételezett.

Stabil naptárat készíteni problémát jelentett a legtöbb ókori nép számára, mert rendszerint a holdnaptárból indultak ki: egy hónap hossza két egymást követő telihold közt eltelt idő volt. Ez természetes választás, az égen nehéz nem észrevenni a fogyó és növő holdat, ami kényelmes lehetőséget biztosít az idő ismétlődő ciklusainak jelölésére. A holdhónap hossza azonban 29 és 30 nap közé esik. Akárhogy osztjuk is be, 12 holdhónap csak 354 napot tesz ki – nagyjából 11 nappal rövidebb a napév hosszánál. Tizenhárom holdhónap viszont nagyjából 19 nappal hosszabb a kelleténél. Miután pedig az aratás és vetés idejét nem a holdév, hanem a napév határozza meg, a nem korrigált holdév alapján számolt évszakok egyre jobban eltolódtak.

A holdnaptár kiigazítása viszont nagyon bonyolult feladat. Több modern ország, így Izrael és Szaúd-Arábia is a mai napig módosított holdnaptárat használ, pedig az egyiptomiak már 6000 évvel ezelőtt jobb rendszerrel álltak elő. Sokkal egyszerűbb módszerrel tartották számon a napok múlását, ezáltal olyan naptárat készítettek, amely hosszú éveken át szinkronban maradt az évszakokkal. Az egyiptomiak nem a Hold, hanem a Nap segítségével tartották számon az idő múlását, akárcsak manapság a legtöbb ország.

Az egyiptomi naptárban a holdnaptárhoz hasonlóan 12 hónap volt, és mindegyik 30 napból állt. (Miután alapvetően tízes számrendszert használtak, hetük, a *dekád* 10 napból állt.) Az év végén még volt öt külön nap, így az egész 365 napot tett ki. Ez volt a mi naptárunk őse. Az egyiptomi rendszert vették át a görögök, majd a rómaiak is, akik még a szökőévek hozzáadásával módosították, ebből lett a nyugati világ szokásos naptára. Mivel azonban az egyiptomiak, a görögök és a rómaiak nem ismerték a nullát, a nyugati naptárban ilyesmi nem is szerepel – ez a hiányosság aztán majd évezredekkel később okoz problémákat.

A szoláris naptár bevezetése igazi áttörést jelentett az egyiptomiak részéről, ám még erősebben rajta hagyták kézjelüket a történelmen a geometria tudományának felfedezésével. Nulla híján is hamar mesteri matematikusok lettek. De egy szeszélyes folyónak köszönhetően nem is volt más választásuk. A Nílus minden évben kilépett a medréből, és elöntötte a torkolatvidékét. Ebben az volt a jó hír, hogy az áradás mindenfelé bőséges folyami hordalékot terített a földekre, így az ókori világ legtermékenyebb mezőgazdasági területévé változtatta a Nílus deltáját. A rossz hír viszont az volt, hogy a folyó számos határjelzést elsodort, megsemmisítette a földhatárok jelölését, amelyekből a földművesek tudhatták volna, hogy melyik az ő földjük, amelyet meg kell művelni. (Az egyiptomiak nagyon komolyan vették a birtokjogot. Az *Egyiptomi halottaskönyv*ben az elhunytnak meg kell esküdnie az istenek előtt, hogy nem csapta be a szomszédját, nem tulajdonította el a földjét. Ez akkora bűn volt, hogy büntetésképpen a szívét a felfalónak nevezett rettenetes fenevad elé vethették. Egyiptomban a felebarát földjének elorzása ugyanakkora bűnnek számított, mint az esküszegés, valakinek a meggyilkolása vagy az önkielégítés a templomban.)

Az ókori fáraók földmérőket neveztek ki a károk felmérésére és a határjelzők visszaállítására, ebből született a geometria.

Ezek a földmérők vagy kötélfeszítők (akik mérőeszközükről és a derékszögek kijelölésére szolgáló csomózott kötelekről kapták nevüket) idővel megtanulták, hogyan számolják ki a téglalapokra és háromszögekre osztott telkek területét. Sőt, arra is rájöttek, hogyan kell testek – például piramisok – térfogatát megmérni. Az egyiptomi matematikusok híre bejárta a Földközi-tenger vidékét, valószínűleg az első, geometriában járatos görög matematikusok, például Thalész és Püthagorasz is Egyiptomban tanulta a mesterséget. De akármilyen zseniálisak voltak az egyiptomiak a geometriában, a nullának nyomát sem találjuk náluk.

Ennek részben az az oka, hogy az egyiptomi gyakorlatias nép volt. Soha nem léptek túl a térfogatmérésen, a napok-órák számlálásán. Nem praktikus dolgokra soha nem használták a matematikát, eltekintve az asztrológiai rendszerüktől. Ennek folytán legjobb matematikusaik sem tudták a geometria elveit alkalmazni semmi olyasmire, ami nem kapcsolódott a valóságos világ valós problémáihoz – matematikai rendszerükből nem faragtak absztrakt logikai rendszert. Arra sem hajlottak, hogy matematikát vigyenek a filozófiájukba. A görögök azonban mások voltak, örömmel vették az absztrakt vagy filozofikus dolgokat, és az ókorban a legmagasabb szintre fejlesztették a matematikát. A nullát mégsem ők fedezték fel. A nulla keletről, nem pedig nyugatról érkezett.

A nulla születése

A kultúra történetében örökre kimagaslik a nulla felfedezése mint az emberiség egyik legnagyobb teljesítménye.

Tobias Dantzig: *Number: The Language of Science*

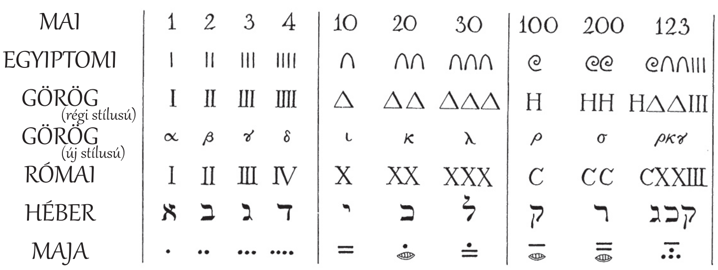
A görögök jobban értettek a matematikához az egyiptomiaknál. Miután elsajátították a geometria egyiptomi tudományát, hamarosan túlszárnyalták mestereiket.

A görög számrendszer kezdetben nagyon hasonlított az egyiptomira. Ők is tízes alapú számolást használtak, a két kultúra számjelölésében sem volt túl nagy különbség. A görögök azonban nem képekkel ábrázolták a számokat, mint az egyiptomiak, hanem betűket használtak. Az H (éta) jelölte a *hekaton*t, vagyis a százat, míg a M (mű) volt a *müriori,* vagyis tízezer – a miriád, a görög rendszer legnagyobb sokasága. Külön szimbólumuk volt az ötre, ami vegyes ötös-tízes számrendszerre utal, de mindent összevetve a számírás görög és egyiptomi rendszere szinte megegyezett – legalábbis egy darabig. A görögök, az egyiptomiakkal ellentétben, kinőtték ezt a kezdetleges számírási rendszert, és fejlettebbet dolgoztak ki.

Az egyiptomi típusú számolás helyett, amelynek értelmében a 2-t két vonással, a 300-at három H-val ábrázolták volna, az i. e. 500 körül megjelenő újabb görög írásrendszerben külön betű jelölte a 2, 3, 300 számokat, de egy sor másikat is (*lásd* 1. ábra). Ily módon a görögök elkerülték a betűk sokszorozását. Az egyiptomi rendszernek például a 87 szám leírásához 15 szimbólum kellett: nyolc sarok és hét függőleges vonás. Az új görög rendszerben elég volt két jel: π a 80-ra és ζ a 7-re. (A görög számokat kiszorító római rendszer egy lépéssel visszalépett a kevésbé fejlett egyiptomi rendszer felé. Római számokkal a 87: LXXXVII, hét szimbólumból áll és több ismétlést használ.)

Bár a görög számrendszer kifinomultabb volt az egyiptominál, nem ez volt az ókor legfejlettebb számírási rendszere. Ezt a címet egy másik keleti lelemény, a babiloni típusú számolás vívta ki. És ennek a rendszernek köszönhető, hogy a nulla végül is megjelent Keleten, a mai Irak területén levő termékeny félholdban.

A babiloni rendszer első ránézésre teljesen elfuseráltnak tűnik. Először is a 60-as számra épül. Furcsa választásnak tűnik, tekintve, hogy a legtöbb emberi társadalom az 5, 10 vagy 20 számot veszi alapul. Ráadásul a babiloniak mindössze két jel igénybevételével ábrázolták a számaikat: egyszeres ékkel az 1-est és kettős ékkel a 10-est. Ilyen, összesen legfeljebb 59-et kitevő kupacokba rendezett jelekre alapozták számolási rendszerüket, ahogy a görögöké betűkre, az egyiptomiaké pedig képekre épült. Ám a babiloni rendszer igazi furcsasága abban állt, hogy nem használtak minden számra különböző szimbólumokat, mint az egyiptomi vagy görög rendszer. Minden babiloni szimbólum sokféle különböző számot ábrázolhatott. Például egyetlen ék jelölhette az 1, 60, 3600, de még számtalan más számot is.



1. ábra. A számok különböző kultúrákban

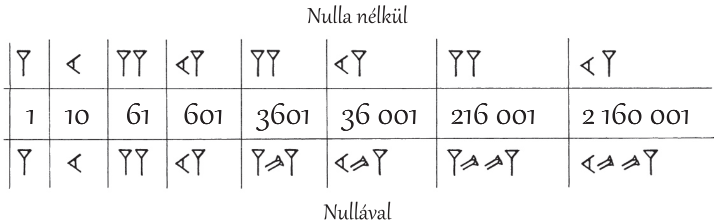
Amilyen furcsának tűnik mai szemmel ez a rendszer, annyira észszerű volt az ókoriak számára. A számítógépes program bronzkori megfelelőjének tekinthető. A babiloniak számos más kultúrához hasonlóan olyan gépeket is kiötöltek, amelyek segítettek a számolásban. Ezek közül a leghíresebb az abakusz, amelyet Japánban *szorobán,* Kínában *szuan-pan,* Oroszországban *szcsoti,* Törökországban *kölba,* Örményországban *choreb* és különböző kultúrákban még számos más néven ismernek. Kis golyók ide-oda tologatásával tartja számon a mennyiségeket. (A *kalkulál, kalkulus,* de még a *kalcium* szó is a „kavics” jelentésű latin *calculus*ból ered.)

Az abakuszon a számok összeadása egyszerűen a kis golyók jobbra-balra tologatásából áll. A különböző sorokban szereplő golyócskák más-más értéket képviselnek, elcsúsztatásukkal a gyakorlott felhasználó rendkívül gyorsan és nagy számokkal tud számolni. A számítás befejeztével a felhasználónak csak meg kell néznie a golyók elhelyezkedését, ebből – meglehetősen egyszerű művelettel – le tudja olvasni a számszerű eredményt.

A babiloni számolási rendszer olyan volt, mint egy agyagtáblára rótt szimbolikus abakusz. Minden jelcsoport az abakuszon eltolt golyók valamilyen számának felelt meg, és az abakusz egyes soraihoz hasonlóan minden csoportnak más volt az értéke az elhelyezkedésétől függően. A babiloni rendszer tehát nem túlságosan tért el a ma használt rendszertől. A 111 számban mindegyik 1-es más számot jelöl, jobbról balra haladva az „egy”, „tíz” és „száz” értéknek felel meg. Ugyanígy az 𒁹 szimbólum az 𒁹𒁹𒁹-ben „egyet”, „hatvanat”, „háromezerhatszázat” jelöl a három különböző helyen. Éppúgy, mint az abakusz. Egyetlen bökkenő van. Hogyan jelölné egy babiloni a 60-as számot? Az 1-est könnyű leírni: 𒁹. Sajnálatos módon a 60-at szintén 𒁹 jelöli, egyedül annyi a különbség, hogy az első helyi érték helyett a másodikon. Az abakusznál könnyű eldönteni, melyik számról van szó. Az első vagy a második sorban álló magányos golyót könnyű megkülönböztetni. Írásban ugyanez nem működik. A babiloniak nem tudták jelölni, hogy a leírt jel melyik oszlopban áll. Az 𒁹 jelölhetett 1-et, 60-at vagy 3600-at is. És ha több számot használtak, csak még rosszabb lett a helyzet. Az 𒁹𒁹 jel lehetett 61, 3601, 3660, de akár egy még nagyobb szám is.

Erre a problémára a nulla kínált megoldást. I. e. 300 körül a babiloniak két ferde éket (𒑱) kezdtek használni az üres hely vagy az abakuszon az üres sor jelölésére. Ezzel a *helykitöltő* jellel már könnyű volt eldönteni, hogy egy jel melyik helyi értéken állt. A nulla megjelenése előtt az 𒁹𒁹 jelenthetett 61-et vagy 3601-et is. A nullával viszont az 𒁹𒁹 már a 61-et jelölte, míg a 3601-et így írták: 𒁹𒑱𒁹 (*lásd* 2. ábra). A nulla tehát abból az igényből született, hogy a babiloni számjegyek bármilyen sorozatának egyetlen állandó jelentése legyen.

A nulla minden hasznossága ellenére mindössze a helykitöltő szerepét játszotta. Pusztán az abakusz üres helyét jelölő szimbólum volt, egy olyan soré, ahol mindegyik golyó balra tolt helyzetben van. Nem tett sokkal többet, csak azt biztosította, hogy a számjegyek a megfelelő helyükre kerüljenek. Saját számértéke valójában nem volt. Végső soron a 000002148 pontosan ugyanazt jelenti, mint a 2148. A számjegyek sorozatában álló nulla a tőle balra álló számokból meríti a jelentését. Önmagában tehát nem jelentett… semmit. A nulla csak számjegy volt, nem pedig szám. Nem volt saját számértéke.

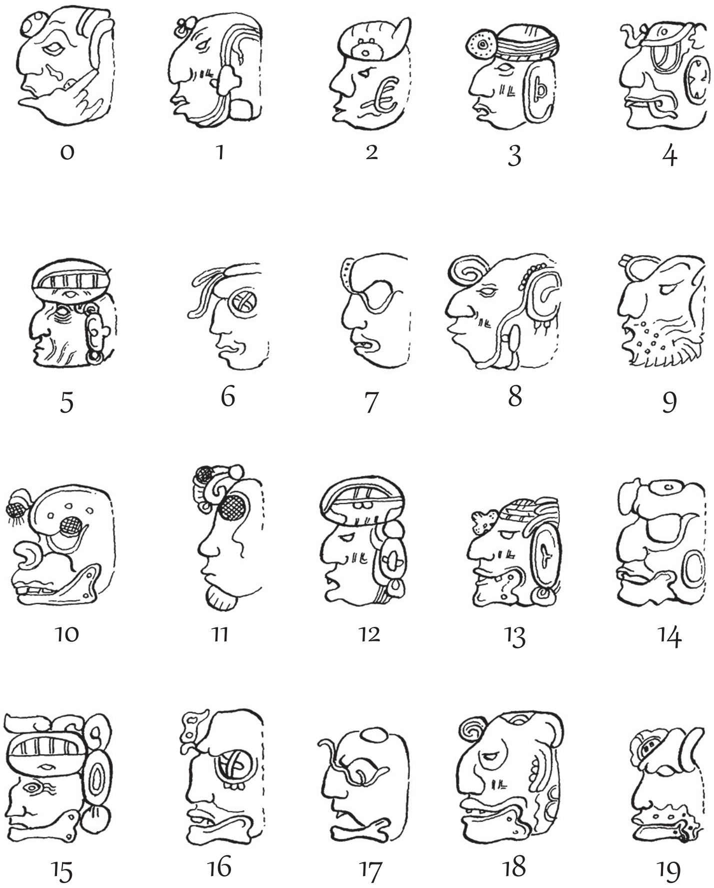


2. ábra. Babiloni számok

Egy szám értéke a számegyenesen elfoglalt – a többi számhoz viszonyított – pozíciójából ered. Például a kettes szám a hármas előtt és az egyes után áll, másutt nem lenne értelme. Kezdetben azonban nem volt a 0 jelnek megfelelő pont a számegyenesen. Puszta jel volt, nem volt helye a számok hierarchiájában. A nullát időnként még ma is úgy kezeljük, mintha nem lenne igazi szám, pedig mindenki tudja, hogy saját számértékkel bír. A 0-t helykitöltőnek használjuk, nem kapcsoljuk össze a nulla számmal. Nézzük csak meg a telefont vagy az angol (amerikai) kiosztású billentyűzet legfelső sorát. A 0 a 9 után áll, nem az 1 előtt, ahol a valódi helye lenne. De hát mindegy is, hogy egy helykitöltő 0 hol áll, bárhol lehet a számok sorában. Pedig manapság már mindenki tudja, hogy a nulla nem állhat bárhol a számegyenesen, mert megvan a saját pontosan meghatározott számértéke. Ez a szám választja el a pozitív számokat a negatívaktól. Páros szám, az egy előtti egész szám. A nullának a maga jogos helyén kell állnia a számegyenesen, 1 és -1 között. Sehol másutt nem lenne értelme. A számítógépen mégis hátul, a telefonon alul találjuk, mert a számolást mindig 1-gyel kezdjük.

Az egyes alkalmasnak tűnik a számolás elkezdésére, ám ezáltal a nullát olyan helyre kell tennünk, amely nem természetes. Más kultúrákban, például a mexikói és közép-amerikai majáknál nem az volt az észszerű, hogy az egyessel kezdjék a számolást. Mi több, a maják számrendszere – és naptára is – értelmesebb volt a miénknél. A babiloniakhoz hasonlóan nekik is számjegyekkel és helyekkel operáló helyi értékes rendszerük volt. Az egyetlen igazi különbség abban állt, hogy a babiloni hatvanas alapú helyett ők húszas számrendszert használtak, amelyben azonban felismerhetők voltak egy korábbi tízes rendszer nyomai. És a babiloniakhoz hasonlóan nekik is kellett a nulla, hogy számontartsák, melyik számjegy mit jelent. Pusztán az érdekesség kedvéért említsük meg, hogy a maják kétféle típusú számjegyeket használtak. Az egyszerűbbek pontokból és egyenesekből álltak, a bonyolultabbak viszont groteszk arcszimbólumokból. Mai szemmel nézve a maja szimbólumírásnál földöntúlibbat el sem lehet képzelni (*lásd* 3. ábra).

Az egyiptomiakhoz hasonlóan a majáknak is kiváló szoláris naptáruk volt. Miután számolásuk a 20-as számon alapult, az évet természetes módon 18, egyenként 20 napos hónapra osztották, így összesen 360 napig tartott, amit a végén egy külön ötnapos szakasz, a *vajeb* egészített ki 365 napra. Az egyiptomiakkal ellentétben azonban a maják számolási rendszerében szerepelt a nulla is, így ők természetes módon a nullával kezdték a napok számlálását. Például zip hónap első napját többnyire zip „beköszöntének” vagy „letelepedésének” nevezték.



3. ábra. Maja számok

A következő nap zip 1 volt, a rá következő zip 2, és így tovább, egészen zip 19-ig. Az ezután következő nap zoc „letelepedése” volt – zoc 0, ezt követte zoc 1 és így tovább. Mindegyik hónap 20 napból állt, amelyeket 0-tól 19-ig számoztak, nem pedig 1-től 20-ig, ahogy ma tennénk. (A maja naptár gyönyörűen bonyolult volt. A fenti szoláris naptár mellett használtak egy rituális naptárt is, amely 20, egyenként 13 napos hétből állt. A szoláris naptárral kombinálva ebből állt össze az a naptári ciklus, amelyben egy 52 éves periódusban minden napnak más neve volt.)

A maja rendszer értelmesebb volt a nyugatinál. Miután a nyugati rendszert akkor alkották meg, amikor még nem létezett nulla, mi nulladik nappal vagy évvel soha nem találkozunk. Ez a látszólag jelentéktelen hiányosság rengeteg bajt okozott. Például ez adott tápot az ezredforduló kezdetét illető vitának. A maják soha nem vitatkoztak volna azon, hogy vajon 2000 vagy 2001 a 21. század első éve. A mi naptárunkat azonban nem a maják, hanem az egyiptomiak, később pedig a rómaiak alakították ki. Így aztán mi megragadtunk a nehézkes, de nullamentes naptárnál.

Az egyiptomi civilizációban a nulla hiánya kárára volt a naptárnak, de megártott a nyugati matematika jövőjének is. Valójában az egyiptomi civilizáció többféleképpen rosszat tett a matematikának, és nem csak a nulla hiánya okozott később nehézségeket. Az egyiptomiak elképesztő körülményességgel kezelték a törteket. A $3/4$-et nem három és négy hányadosaként fogták fel, ahogy ma tennénk, hanem $1/2$ és $1/4$ összegeként. A $2/3$ kivételével minden egyiptomi törtet $1/n$ alakú számok – úgynevezett egységtörtek – összegeként írtak fel (ahol n természetes szám). Ilyesfajta egységtörtek hosszú sora tette elképesztően nehézkessé a hányadosok kezelését az egyiptomi (és a görög) számrendszerben.

A nulla egy csapásra idejétmúlttá teszi ezt a körülményes rendszert. A babiloni rendszerben – ahol van nulla – könnyű felírni a törteket. Ahogy mi is 0,5-et írhatunk $1/2$ és 0,75-ot $3/4$ helyett, a babiloniak $0:30$-cal jelölték az $1/2$-et és $0:45$-tel a $3/4$-et. (Valójában a hatvanas babiloni számrendszer még a mai tízes számrendszernél is alkalmasabb a törtek leírására.)

Sajnálatos módon a görögök és rómaiak annyira utálták a nullát, hogy nem vették át a babiloni rendszert, inkább ragaszkodtak a saját egyiptomi jellegű jelölésükhöz, pedig a babilonit könnyebb volt használni. Csillagászati táblázatok készítésére és más hasonlóan bonyolult számításokra a görög rendszer annyira nehézkes volt, hogy a matematikusok inkább átváltották az egységtörteket babiloni hatvanas számrendszerre, abban végezték el a számításokat, majd az eredményt visszafordították görög stílusúra. Pedig ezt a rengeteg időigényes lépést megspórolhatták volna. (Mindenki tudja, milyen jó szórakozás törteket átváltani innen oda!) A görögök azonban annyira megvetették a nullát, hogy saját írásukba be sem engedték, pedig jól látták, mennyire hasznos. Mert a nulla: veszedelmes.

A semmi félelmetes vonásai

Rege-időn rég, / Ymir élt akkor,
nem volt homok, se tenger, / se hideg habok,
föld nem terült, / se fölöttünk ég,
nyílt varázsnyiladékban / fű nem feslett.[2]

Edda

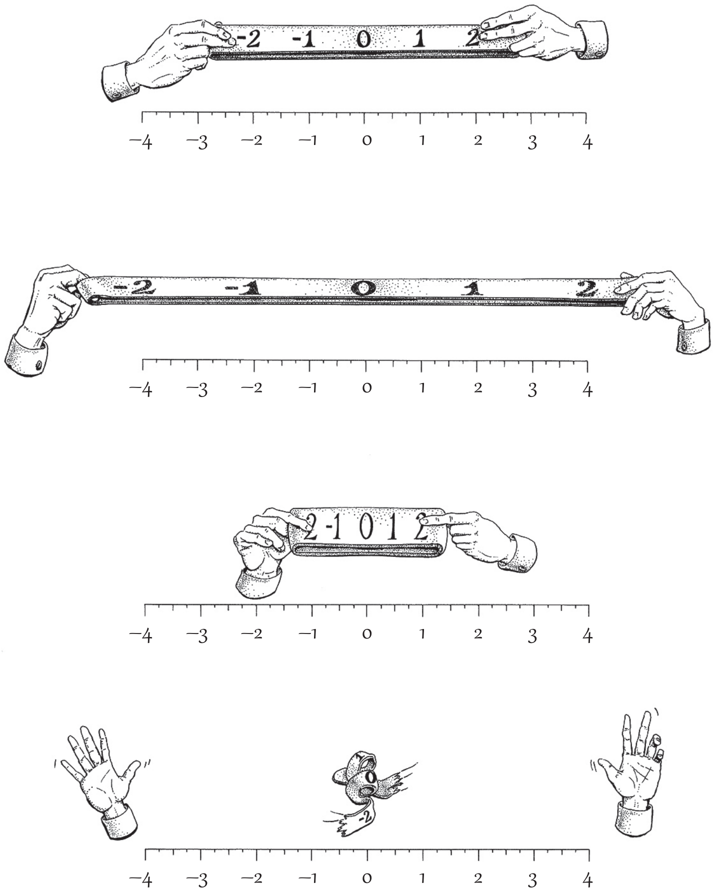
Nehéz elhinni, hogy valaki fél egy számtól. Pedig a nulla elválaszthatatlanul összekapcsolódott az ürességgel – a semmivel. Az ürességet és a káoszt pedig ősi rettegés vette körül. Ezért féltek a nullától is.

A legtöbb ősi nép abban hitt, hogy a világ keletkezése előtt csak az üresség és a káosz létezett. A görögök azt vallották, hogy a kezdet kezdetén a sötétség volt minden dolgok szülőanyja, és a sötétségből keletkezett a káosz. Majd a sötétségből és káoszból eredt a teremtés többi része. A héber teremtési mítoszok szerint a Föld kaotikus volt, és üres, amíg Isten el nem árasztotta fénnyel és meg nem formálta a vonásait. (A héber kifejezés *tohu va bohu*. Robert Graves ezt a *tohu*t Tehómmal, a világ születésénél jelen levő sémi őssárkánnyal kötötte össze, akinek testéből lett a menny és a föld. A *bohu* pedig Behemóthoz, a híres héber legenda szörnyéhez kapcsolódott.) A régebbi hindu hagyományban olyan teremtő szerepel, aki káoszból köpüli a vajat, és ebből lesz a Föld, a skandináv mitológiában pedig arról a tágas ürességről van szó, amelyet elborít a jég, hogy aztán a tűz és jég keveredéséből fakadó káoszból szülessen meg az első Óriás. Az űr és a zűr volt a világegyetem eredendő, természetes állapota, és mindig ott bujkált a félelem, hogy az idők végén ismét eluralkodik a zűrzavar meg az üresség. És a nulla ezt az űrt képviselte.

Ám a nullától való rettegés még az üresség feletti nyugtalanságon is túltett. Az ősök szemében a nulla megmagyarázhatatlan matematikai tulajdonságai ugyanolyan titokzatosságba burkolóztak, mint a világ keletkezése. Ennek pedig az az oka, hogy a nulla különbözik minden más számtól. A babiloni rendszerben a nullát a többi számjegytől eltérően soha nem engedték önmagában állni – mégpedig jó okkal. A magányos nulla mindig rakoncátlankodni kezd. Mindenesetre nem úgy viselkedik, mint a többi szám.

Ha egy számot hozzáadunk önmagához, megváltozik. Egy meg egy már nem egy – hanem kettő. Kettő meg kettő az négy. De nulla meg nulla az nulla. Ez pedig sérti a számok arkhimédészi axiómának nevezett alapelvét, amely kimondja, hogy ha valamit kellően sokszor összeadunk önmagával, bármely más számnál nagyobbat kaphatunk. (Az arkhimédészi axiómát területekre mondták ki – a számot két különböző terület különbségének tekintették.) A nulla viszont nem hajlandó megnőni. Sőt, egyetlen másik számot sem tesz nagyobbá. Ha kettőhöz nullát adunk, kettőt kapunk, mintha eleve nem is adtuk volna össze őket. Ugyanez áll a kivonásra. Vegyünk el kettőből nullát – megint kettőt kapunk. A nullában nincs anyag. És mégis, ez az anyagtalan szám azzal fenyeget, hogy a matematika legegyszerűbb műveleteit, például a szorzást és az osztást is elrontja.

A számok birodalmában a szorzás egyfajta nyújtás – a szó szoros értelmében. Képzeljük el a számegyenest mint egy gumiszalagot, rárajzolt beosztásokkal (*lásd* 4. ábra). A kettővel való szorzást a gumiszalag kétszeresére nyújtásaként is elgondolhatjuk: az egynél berajzolt rovátka most a kettő, a háromra berajzolt pedig a hat helyére kerül. Hasonlóképpen, egykettеddel szorozni annyit jelent, hogy valamelyest lazítunk a gumiszalag feszítésén: a kettőnél bejelölt rovátka most az egyhez, a háromnál levő pedig másfélhez kerül. Mi történik azonban, amikor nullával szorzunk?



4. ábra. Szorzás művelete gumiszalaggal