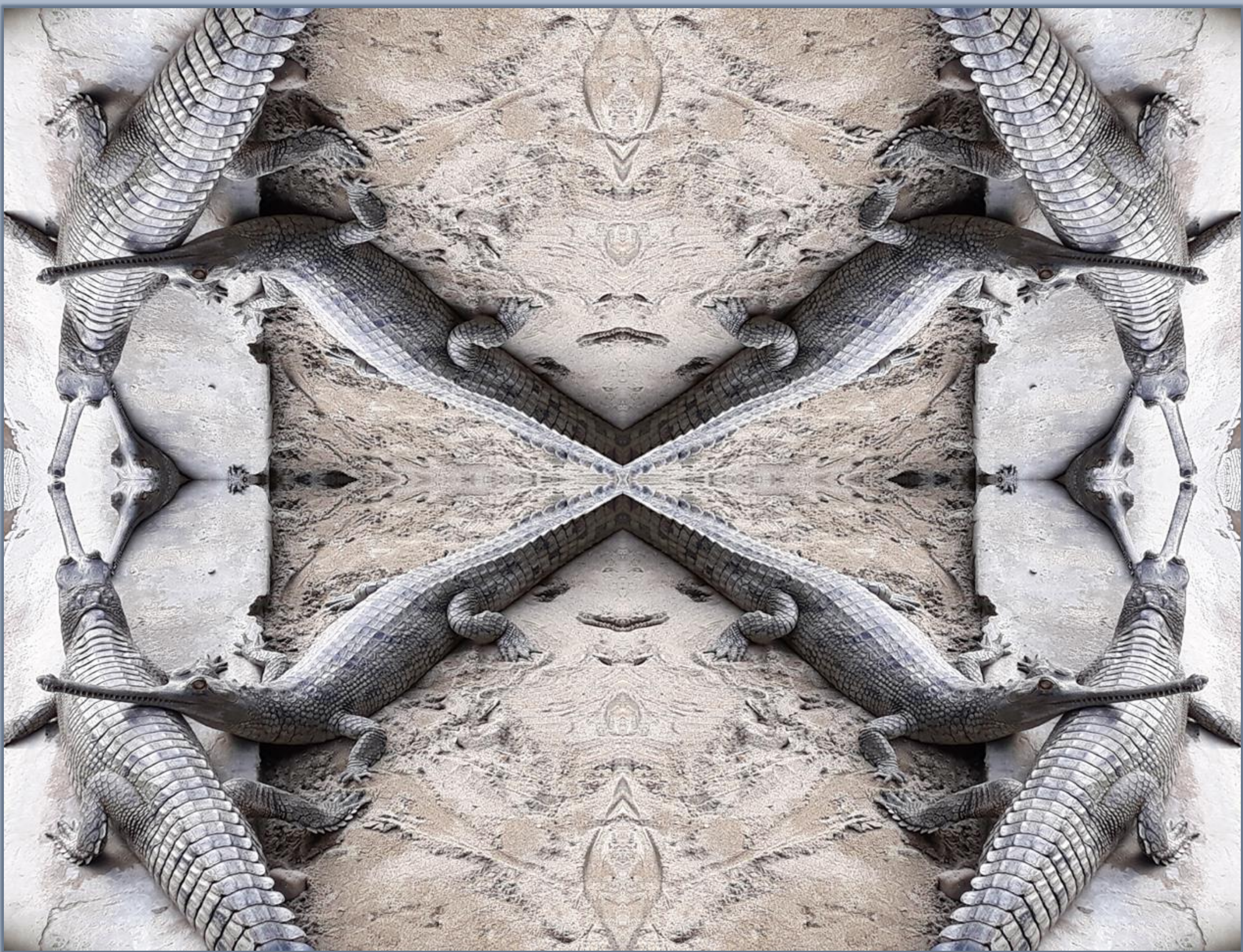
Gazdaságmatematika

interaktív alkalmazásokkal



Bugár Gyöngyi – Kovács Balázs

Lektorálta: Longauer Dóra

Magánkiadás, Pécs, 2022

ISBN 978-615-01-5091-8

Szeretettel és hálával Irénke néninek (Dormán Máténé), aki „csemege” feladataival életre szóló rajongást ébresztett bennem a matematika iránt.

Gyöngyi

Mindazoknak, akiknek nem adatott meg, hogy tanuljanak.

Balázs

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

Könyvünket a digitális kor kihívásainak megfelelően kizárólag E-book formájában jelentetjük meg. A passzív olvasás helyett arra ösztönözzük az olvasót, hogy aktívan vegyen részt a problémamegoldásban és a fontos kérdések megválaszolásában.

Egy gazdasági szakember számára elengedhetetlen, hogy ismerje a többváltozós függvények optimalizálási módszereit. A gazdasági szereplők számára fontos cél a költségek minimalizálása, illetve a profit maximalizálása. A költségek vagy a nyereség optimalizálása során általában bizonyos korlátozó feltételeknek is eleget kell tenni, amelyek lehetnek technológiai, pénzügyi, vagy egyéb korlátok. Könyvünk az ilyen típusú optimalizáláshoz kapcsolódó eljárásoknak és alkalmazásoknak a bemutatására helyezi a hangsúlyt.

A könyv eredményes használatához ismerni kell az egyváltozós függvények differenciálszámítását. Javasoljuk, hogy amennyiben ebben az utóbbi témakörben nem érzi valaki elég biztosnak a tudását, frissítse fel a differenciálszámítási szabályokat.

Könyvünk összesen 10 fejezetből áll, amelyek azonos felépítést követnek. A releváns témakörök vizsgálatához szükséges *elméleti ismeretek* (fogalmak, tételek) tömör *összefoglalásá*t követően bemutatjuk néhány probléma *kidolgozott megoldás*át. Minden fejezetet legalább két, *egyedi problémákat generáló alkalmazás* zár. Ez adja a könyv *interaktív* jellegét, mert lehetőséget biztosít arra, hogy a felhasználó saját megoldási javaslatát akár lépésről lépésre haladva összevesse a külön kérésre megjeleníthető helyes válasszal. Az olvasó egy adott típusú problémára újabb meg újabb változatokat generálhat mindaddig, amíg elég biztosnak nem érzi a tudását.

A legenda szerint Ptolemaiosz, egyiptomi király kérdésére, hogy van-e könnyebb módszer a geometria elsajátítására, mint az általa írott Elemek c. mű áttanulmányozása, Euklidész görög matematikus azt felelte: „A geometriához nem vezet királyi út”. Annak ellenére, hogy a matematikához nincs „királyi út”, nagyon bízunk abban, hogy mindazok, akik a könyvet forgatják, nemcsak hasznosnak, hanem a hagyományos módszerekhez képest könnyebbnek és élményszerűbbnek találják a bemutatott témakörökhöz kapcsolódó, az olvasó bevonására épülő, problémacentrikus gondolkodást.

Végül szeretnénk köszönetünket kifejezni a könyv lektorának, Longauer Dórának, aki körültekintő figyelemmel és hasznos észrevételeivel nagyban segítette munkánkat.

Pécs, 2022. április 20. Bugár Gyöngyi és Kovács Balázs

Az interaktív alkalmazások elérése

A megvásárolt e-bookhoz kapcsolódó interaktív alkalmazások csak regisztráció után válnak hozzáférhetővé a www.gazdmat-interaktiv.hu internetcímen. Amennyiben az Ön könyvtára, illetve intézménye rendelkezik ilyen regisztrált példánnyal, az intézmény számítógépes hálózatán belülről bárki számára elérhetők az alkalmazások. Kérjük, kövesse a megnevezett honlapon olvasható utasításokat!

Ha Ön saját példánnyal rendelkezik az e-bookból, akkor jelszavas azonosítást követően bárhonnan hozzáférhet az interaktív tartalomhoz. A www.gazdmat-interaktiv.hu internetcímen további információkat talál a hozzáférés igénylésével kapcsolatban.

Miután már rendelkezik hozzáféréssel, az alkalmazásokat webböngészőn keresztül lehet használni. A főoldalról a megfelelő fejezethez tartozó linkre kattintva jut el azokra a lapokra, amelyeken eléri az interaktív alkalmazásokat.

Ha bármi kérdése támad, kérjük, írjon a könyv szerzőinek a gazdmatinteraktiv@gmail.com e-mail címre! Kérjük a könyvtárosokat, hogy az intézményi regisztráció érdekében keressék a szerzőket ugyanezen az elérhetőségen.

Az alkalmazások használata

Az alkalmazások fejezetenként külön lapon találhatók a webhelyen, melyek Microsoft Excelben készültek, így használatuk leginkább e táblázatkezelő használatára hasonlít. Az egyes problémák külön munkalapon találhatók, amelyek között a keret alján található lapfülekre kattintva lehet váltani. Az általános munkalapoktól eltérően a legtöbb cella nem jelölhető ki. Az ilyen területeken a probléma leírása, valamint a megoldáshoz tartozó utasítások, információk olvashatók, illetve ábrák és képletek láthatók. A felhasználó csupán a színes hátterű cellákat és néhány, a weblapokon szokásos kezelőelemet tud kijelölni.

A válaszokat a színes hátterű cellákba kell beírni, vagy rájuk kattintva, listából lehet kiválasztani. Ezeket a cellákat inputcelláknak hívjuk. Az alkalmazás figyelmeztetni fogja Önt, ha olyan választ próbál beírni egy inputcellába, amely a megoldás szempontjából nem elfogadható, például szöveget írna be egy cellába, amelybe számot vár a rendszer.

A törtszámok beírására elsősorban a tizedes tört alakot javasoljuk. Érdemes megjegyezni, hogy a Microsoft Excel a legtöbb esetben automatikusan átalakítja dátummá a jobbra dőlő perjellel határolt számpárokat, például a 2/7 alakban beírt tartalmat július 2-aként értelmezi. Ez minden esetben elkerülhető, ha a tört beírását egyenlőségjellel kezdi: =2/7. Ezen kívül, amelyik fejezetnél ezt külön jelöljük, a törtek egyszerűbb beírása érdekében az inputcellákba közvetlenül is írhatók törtek. Az ilyen cellák esetén a beírás után a tört formázása átalakul úgy, hogy külön látható az egészrész és a törtrész, például 7/3 beírása esetén: 2 1/3. Általában egész számok lesznek a részmegoldások, de természetesen bizonyos problématípusok esetén a törtek használata elkerülhetetlen.

Az interaktív alkalmazások általában az e-bookban olvasható bemutatott problémák felépítését követik. A kitöltés során a formai hibákra figyelmeztet a rendszer, de arról, hogy helyes-e a válasz, mindaddig nem ad információt, amíg az ellenőrzés ki van kapcsolva. Ha szeretné látni az adott lépéshez tartozó helyes választ, jelölje be a lépéshez tartozó szakasz jobb oldalánál, hogy szeretné ellenőriztetni a munkáját. Ilyenkor zöld betűszínnel jelezve láthatóvá válnak a helyes válaszok. Az ellenőrzés kikapcsolását is Önnek kell elvégezni, de kényelmi okokból bekapcsolva is lehet hagyni. Ilyenkor, ha új verziót kér az adott problémából, rögtön láthatók lesznek a helyes válaszok.

Minden alkalmazásból szinte korlátlan számú verzió áll rendelkezésre, melyeket sorszámmal láttunk el, így, ha szeretné később újra megtekinteni, vagy kérdése lenne az adott verzióval kapcsolatban, akkor ezt később megteheti. A verzió sorszámát egy inputcellába lehet beírni mindegyik probléma fölött, a jobb oldalon.

1.

Végtelen sorok.
Végtelen sorok konvergenciája és divergenciája.
Végtelen mértani sor és közgazdasági alkalmazásai.

1.1 ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÓ

Végtelen számsor fogalma

Legyen adott egy $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ számsorozat. A sorozat tagjaiból képezett végtelen (sok tagú) összeget ***végtelen sornak*** nevezzük.

Jelölése

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$

Mértani (geometriai) sor

Az $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_1\, q^{i-1}$ végtelen sort ***mértani sor***nak nevezzük, amelynek a_1 az ***első elem***e, q pedig a ***kvóciens***e (hányadosa).

Harmonikus sor

Az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ sort ***harmonikus sor***nak nevezzük.

Hiperharmonikus sor

Az $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ sort ***hiperharmonikus sor***nak nevezzük.

Például:

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \quad (\alpha = 2)$

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}} \quad (\alpha = \frac{1}{2})$

Végtelen sorok összege

Képezzük az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ végtelen sor első n tagjának az összegét:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Az s_n összeget a végtelen sor ***n-edik részletösszeg***ének nevezzük.

A végtelen sort ***összegezhető***nek, azaz ***konvergens***nek hívjuk, ha az $\{s_n\}$ sorozat konvergens, azaz van véges határértéke. Ebben az esetben a $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ határértéket a ***végtelen sor összegé***nek mondjuk.

Jelölése

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$

Amennyiben a fenti határérték nem létezik vagy nem véges $(\pm\infty)$, akkor a végtelen sor nem összegezhető, azaz ***divergens***.

Mértani (geometriai) sor konvergenciája

Ismert, hogy

$$s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\,(q \neq 1)$$

Ha $|q| < 1$, akkor a mértani sor konvergens, és a sor összege:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Ha $|q| \geq 1$, akkor a mértani sor divergens.

Végtelen sor konvergenciájának szükséges feltétele

TÉTEL:

Ha $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergens, akkor $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

A feltétel nem elégséges, azaz az állítás visszafelé nem teljesül!

Például:

A harmonikus sor nem konvergens, pedig általános eleme nullához tart.

1.2 BEMUTATOTT ALKALMAZÁSOK

1. Határozza meg a következő mértani sor összegét:

$\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^4+\cdots$ □

■ A mértani sor első eleme és hányadosa (kvóciense):

$$a_1=\frac{1}{5} \qquad q=\frac{1}{5}$$

$q<1$ miatt a sor konvergens, és a sorösszeg: $s=\frac{a_1}{1-q}$

$$s=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{4}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

2. Határozza meg a következő mértani sor összegét:

$517+517\cdot(1{,}1)^{-1}+517\cdot(1{,}1)^{-2}+517\cdot(1{,}1)^{-3}+\cdots$ □

■ A mértani sor első eleme és hányadosa (kvóciense):

$$a_1=517 \qquad q=(1{,}1)^{-1}=\frac{1}{1{,}1}$$

$q<1$ miatt a sor konvergens, és a sorösszeg:

$$s=\frac{517}{1-\frac{1}{1{,}1}}=\frac{517}{\frac{1{,}1-1}{1{,}1}}=\frac{517}{\frac{0{,}1}{1{,}1}}=517\cdot\frac{1{,}1}{0{,}1}=5687$$

3. Határozza meg a következő mértani sor összegét:

$a+a(1+a)^{-1}+a(1+a)^{-2}+a(1+a)^{-3}+\cdots \qquad (a>0)$ □

■ A mértani sor első eleme és hányadosa (kvóciense):

$$a_1=a \qquad q=(1+a)^{-1}=\frac{1}{1+a}$$

$q < 1$ miatt a sor konvergens, és a sorösszeg:

$$s = \frac{a}{1-\frac{1}{1+a}} = \frac{a}{\frac{1+a-1}{1+a}} = \frac{a}{\frac{a}{1+a}} = \cancel{a} \cdot \frac{1+a}{\cancel{a}} = 1+a$$

4. Határozza meg a következő mértani sor összegét:

$5 + \frac{5\cdot 3}{7} + \frac{5\cdot 3^2}{7^2} + \ldots + \frac{5\cdot 3^{n-1}}{7^{n-1}} + \ldots$ □

■ A mértani sor első eleme és hányadosa (kvóciense):

$$a_1 = 5 \qquad q = \frac{3}{7}$$

$q < 1$ miatt a sor konvergens, és a sorösszeg:

$$s = \frac{5}{1-\frac{3}{7}} = \frac{5}{\frac{4}{7}} = \frac{35}{4} = 8{,}75$$

5. Vizsgálja meg, hogy konvergens-e az alábbi sor (ha igen, határozza meg a sor összegét):

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ □

■ A fenti sor az x változó függvénye, azaz függvénysor.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2k} + \cdots$$

A felírásból jól látszik, hogy ez egyben olyan mértani sor, amelynek
első eleme és kvóciense:

$$a_1 = x^2 \qquad q = x^2$$

Ismert, hogy a mértani sor $|q| < 1$ esetén konvergens.
Ez azt jelenti, hogy

$$|x^2| < 1, \text{ azaz}$$

$$-1 < x < 1.$$

A vizsgált végtelen sor tehát $-1 < x < 1$ esetén konvergens, és ekkor a sor összege:

$$s = \frac{x^2}{1-x^2}$$

6. Vizsgálja meg, hogy konvergens-e az alábbi sor (ha igen, határozza meg a sor összegét):

$\sum_{k=0}^{\infty} b\left(1+\frac{p}{100}\right)^{-k}$, ahol $p > 0$ □

■ Az alábbi felírásból megállapítható, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} b\left(1+\frac{p}{100}\right)^{-k} = b + \frac{b}{\left(1+\frac{p}{100}\right)} + \frac{b}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^2} + \cdots + \frac{b}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n} + \cdots$$

mértani sorról van szó, amelynek első eleme és kvóciense:

$$a_1 = b \qquad q = \frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

Mivel $p > 0$ esetén $q < 1$, ezért a sor konvergens és összege:

$$s = \frac{b}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)}} = \frac{b}{\frac{1+\frac{p}{100}-1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)}} = \frac{b}{\frac{p}{100}} \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) =$$

$$= \frac{100b \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)}{p} = \frac{b(100+p)}{p} = b\left(\frac{100}{p}+1\right)$$

7. A világ vasfelhasználása 1971-ben 794 millió ($794 \cdot 10^6$) tonnát tett ki. Ha a felhasználás 5%-kal nőtt évente, és 1971-ben a rendelkezésre álló készlet 249 milliárd ($249 \cdot 10^9$) tonna volt, akkor hány évre elegendő készlet állt rendelkezésre? □

■ A feladatban egy olyan mértani sorozatról van szó, amelynek első eleme és kvóciense:

$$a_1 = 794 \cdot 10^6 \qquad q = 1{,}05$$

A vasfelhasználás 1972-ben $794 \cdot 10^6 \cdot 1{,}05$, 1973-ban $794 \cdot 10^6 \cdot 1{,}05^2$, az 1971-es évet követő *n.* évben pedig $794 \cdot 10^6 \cdot 1{,}05^n$. Így a vasfelhasználás a készletek kimerüléséig az adott számtani sorozat első $n+1$ elemének összege:

$$794 \cdot 10^6 + 794 \cdot 10^6 \cdot 1{,}05 + \cdots + 794 \cdot 10^6 \cdot 1{,}05^n = 249 \cdot 10^9$$

$$794 \cdot \cancel{10^6}(1 + 1{,}05 + \cdots + 1{,}05^n) = 249 \cdot 10^{\cancel{9}3}$$

A bal oldali zárójelben levő összeg az $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ formula alkalmazásával (ahol $a_1 = 1$, $q = 1{,}05$; n helyett pedig $n+1$ et kell írni, mert $n+1$ db elem összegéről van szó):

$$1 + 1{,}05 + \cdots + 1{,}05^n = 1 \cdot \frac{(1{,}05)^{n+1} - 1}{1{,}05 - 1}$$

Így a továbbiakban n-re az alábbi egyenletet kell megoldani:

$$794 \cdot \frac{(1{,}05)^{n+1} - 1}{0{,}05} = 249000$$

$$(1{,}05)^{n+1} \approx 16{,}68$$

$$n + 1 \approx \frac{lg16{,}68}{lg1{,}05}$$

$$n \approx 56{,}68$$

Tehát még legalább 56 évig elegendőek a készletek.

8. Állapítsa meg, hogy divergens-e a következő sor**:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n}$ □

■ Mivel a sor általános tagjának határértéke nem nulla, hiszen $a_n = \frac{n}{1+n} \to 1 \ (n \to \infty)$, ezért a sor divergens.

9. Állapítsa meg, hogy divergens-e a következő sor**:**

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{101}{100}\right)^n$ □

■ A sor általános tagjának határértéke: $a_n = \left(\frac{101}{100}\right)^n \to \infty \ (n \to \infty)$. Mivel ez a határérték nullától különböző, ezért a sor divergens.