RÓKA SÁNDOR

VÁLOGATÁS ERDŐS PÁL KEDVENC FELADATAIBÓL

VÁLOGATÁS

ERDŐS PÁL

KEDVENC FELADATAIBÓL

RÓKA SÁNDOR

TYPOTEX

A kötet megjelenését a könyvkiadói program
keretében a Nemzeti Kulturális Alap támogatta.
Nemzeti Kulturális Alap

Lektorálta Kiss Géza

ISBN 978 963 493 244 4

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Laik Eszter
Tördelés: Fried Katalin
Borítóterv: Somogyi Péter
Nyomta és kötötte: Prime Rate Kft.
Felelős vezető: Tomcsányi Péter ügyvezető igazgató

Tartalom

Bevezető

1913. március 26-án születtem, szüleim matematikatanárok voltak, az egyetemen ismerkedtek meg. Születésemkor a szüleimet szörnyű csapás érte. Két testvérem volt, 3 és 5 évesek, és mialatt Anyuka a kórházban volt, születésem közben, 24 óra alatt mindkét nővérem szeptikus skarlátban meghalt. (…) 1914. augusztus elsején édesapámat behívták katonának. Az orosz frontra vitték és hamarosan hadifogoly lett, még 1914 augusztusában. Hat évet töltött hadifogságban.

Sok matematikát tanultam szüleimtől, főleg az elemi magasabb matematikát édesapámtól.

Elég korán kezdtem komolyan matematikával foglalkozni, de nem voltam olyan szenzációs csodagyerek, mint későbbi tanítványaim, Pósa és Lovász.

Még egy korai történetet szeretnék elmondani, ami talán megmagyarázza függetlenségemet. 1919 végén és 1920-ban sokszor lehetett látni, hogy zsidókat megvernek az utcán (főleg, ha még azzal is gyanúsították őket, hogy kommunisták). Anyuka egyszer kérdezte, nem kellene-e kikeresztelkednünk. Azt válaszoltam: „Te tehetsz amit akarsz, de én maradok annak, aminek születtem.” Zsidó voltom tulajdonképpen *nem jelentett nekem semmit, de talán ösztönszerűleg nem szerettem, ha külső hatalmak dirigálnak.*

Ezeket a sorokat Erdős Pál írta 1996 nyarán a *Hogyan lettem matematikus és világvándor...?* címmel megjelent visszaemlékezésében (*Természet Világa,* 1997. február).

Az édesanya a háborús években egyedül, a tanári fizetéséből tartotta el magát és gyermekét, kisfia mellé német nevelőnőt is fogadott. Az édesanya és fia között különösen erős ragaszkodás alakult ki.

Amikor édesapja hazatért, Erdős az ő segítségével kezdett el angolul tanulni. Erdős Pált a szülők otthon tanították, sokáig nem engedték nyilvános iskolába, féltették a fertőzésektől. Az iskolás évek nagy részét magántanulóként végezte azért is, mert a kötöttségeket, a tanítási órák fegyelmét korlátozónak érezte, ezek nélkül szabadabban fejlődhetett. Erdős gondolkodása nagyon egyedi volt, és ezt az iskola így nem tudta elrontani.

Tizenkét éves korában már világosan látta, hogy el kell hagynia Magyarországot, mert zsidó.

Csodagyerek volt, hároméves korában többjegyű számokat fejben szorzott össze. Tízéves volt, amikor az édesapja elmondta neki Eukleidész bizonyítását arra, hogy végtelen sok prímszám van, és azt a bizonyítást is, hogy két szomszédos prímszám között tetszőlegesen nagy lehet a távolság. Teljesen a hatásuk alá került. Korán eldöntötte, hogy matematikus lesz, és ebben sokat segített a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*[1] is, a lap feladatain neve-

[1] A *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok,* a *KöMaL* ma is létezik. A lapot 1894-ben alapították.

lődött, a feladatok megoldása sok örömmel járt. A legjobb feladatmegoldók között volt, első megoldása 13 éves korában jelent meg a lapban.

1930 szeptemberétől a pesti tudományegyetem matematika–fizika szakán tanul, itt találkozik a többiekkel, akiknek a nevét a *KöMaL*-ból már ismerte. Fiatal matematikusokból kialakul egy szoros baráti kör, és ezek életre szóló barátságok, túlélik a harmincas évek felfordulását, a szörnyű világháborút, és azt, hogy szétszóródnak a világ minden tájára. Az egyetemi évek alatt hetente találkoznak, kirándulni járnak, matematikáról beszélgetnek.

Erdős Pál az első figyelemre méltó eredményét 18 éves korában teszi közzé, egyszerű bizonyítást ad a Csebisev-tételre, miszerint egy szám és a kétszerese között mindig van prímszám. Ezért és Erdős egyéb ekkoriban talált eredményeiért Issai Schur, a nagy berlini matematikus az alig húszéves Erdőst egy levélben „der Zauberer von Budapest" jelzővel illeti. Kezdeti sikereit a számelmélet területén éri el – a számelmélethez egész életében hű marad.

1934-ben elvégzi az egyetemet, Fejér Lipótnál doktorál, ösztöndíjjal három évre Angliába utazik, majd Princetonba megy.

Itt született egy fontos eredménye, az Erdős–Kac-tétel. A történtekre Kac így emlékszik: *Akkoriban még nagyon keveset tudtam a számelméletről, ezért a valószínűségszámítás keretei között kerestem a bizonyítást, de mindhiába. 1939 márciusában Baltimore-ból Princetonba utaztam előadást tartani. Erdős – aki ezt az évet az Institute of Advanced Studyban töltötte – megjelent az előadásomon, de tulajdon-*

képpen végig bóbiskolt; a téma nagyon messze esett az érdeklődési körétől. Az előadás vége felé röviden vázoltam a prímosztókkal kapcsolatos nehézségeimet. A számelmélet szó hallatán Erdős felriadt, és megkért, hogy magyarázzam el még egyszer a problémámat. Néhány percen belül, még az előadás vége előtt azzal szakított félbe, hogy tudja a megoldást! (Mark Kac: *A véletlen rejtélyei. Önéletrajz*, Typotex Kiadó, 2022)

Még egy történet Erdős fiatal korából. A számelmélet neves kutatójának, Harold Davenportnak az özvegye mesélte:

Valamikor a 30-as években történt, hogy Erdős és Harold, a férjem több mint egy óra hosszat ültek egy nyilvános helyen, mélyen elgondolkodva, anélkül, hogy egy árva szót is szóltak volna. A csendet végül Harold törte meg.

– Nem 0, *hanem* 1 *– mondta.*

Mindketten megkönnyebbültek, és együtt örültek az eredménynek.

Szokatlan életformát alakít ki, nincs munkahelye, sehol sem tartózkodik egy-két hónapnál hosszabb ideig. Élete a matematika. Felkeresi a matematikusokat, együtt dolgozik másokkal. Könnyű vele találkozni, elég helyben maradni, ő biztosan odaér valamikor. Ahol megjelenik a világban, ott felpezsdül a matematikai élet.

500-nál több matematikussal van közös cikke és 1500-nál több dolgozatot írt. Már életében legendává vált, nagy konferenciákat rendeznek a tiszteletére.

Varsóban halt meg 1996. szeptember 20-án. Az előző napokban még előadást tartott.

Ami egész életútját illeti, van mit irigyelni? – kérdezte egyszer egy újságíró. Erdős így válaszolt: *Irigyelni nincs mit, nem is kell. Mindenki járja a saját útját.*

Legendás memóriája volt. Emlékezett a saját és mások eredményeire a kiadásuk helyével és dátumával együtt, több száz matematikussal való több évtizeddel korábbi beszélgetésére úgy, ahogy más a tegnap történtekre sem emlékszik.

Borzasztóan büszke volt arra, hogy egyszerre többféle dolgot is tud csinálni. Mondjuk politikáról társalogni egy vendéggel, közben különböző matematikai kérdéseket boncolgatni két másikkal, és könyvet olvasni.

Régi barátja, Ernst G. Straus szerint (aki sokáig Einstein munkatársa volt) Erdős a problémamegoldók fejedelme és a problémafelvetők abszolút egyeduralkodója. Nagyon sok problémát megfogalmaz, meglepő kérdéseket tesz fel, amelyek megoldása fontos előrelépést jelent. Gyakran pénzdíjat ajánl a megoldónak, akár néhány ezer dollárt. Aki megold egy Erdős problémát, annak számára ez komoly szakmai rangot jelent.

Egy 3000 dolláros kérdése: Igaz-e, hogy ha egész számok $a_1, a_2, \ldots$ sorozatára

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$$

teljesül, akkor minden k-ra van az a_i-kből álló k tagú számtani sorozat?

Vannak olyan kérdései, feladatai, amelyek ennél könynyebben megválaszolhatók. Sok feladatot kitűzött a

KöMaL-ban, a *The American Mathematical Monthly*ban és máshol. A *Monthly* folyóirat feladatrovatában száznál több feladata jelent meg. (1957-ben kiadtak egy válogatást a *Monthly* szép feladataiból, és a kötet 400 feladatából 34 Erdős Pálé.)

A matematikában fontos értékelési szempont, hogy amit csinálunk, az szép is legyen. Hardy szerint a szépség az első kritérium: a csúnya matematikának nincs tartós helye a világban. Az elegáns, a szép, a tökéletes bizonyításokra Erdős azt mondta: *Ez a bizonyítás a Könyvből való!* Erdős szavai a Könyvről: *Azt szoktam mondani, Istennek van egy könyve, amelyben minden tétel és a legjobb bizonyítások vannak. Hozzá szoktam tenni: ha nem is hiszel Istenben, a Könyvben hinned kell! És néha még azt is: talán az Isten maga a Könyv.*

Erdős feladatai szépek, szokatlanok, jó rajtuk gondolkodni. A kedvenc feladataiból válogattam, közülük több is a Könyvből való.

Vannak olyan feladatok, amelyek megoldása elvárható azoktól, akik versenyeken indulnak, de vannak itt olyan állítások is, amelyekre a bizonyítást évekig keresték, pedig meglepően rövid és világos az indoklás. Némelyik feladat megoldása reménytelen a hétköznapi halandóknak, ahhoz szerencsés csillagállás és Erdőshöz hasonló varázslók kellenek.

Az Olvasónak segítség lehet, ha tudja előre, milyen esélyekkel kezd hozzá a megoldáshoz. Könnyű vagy nehéz a feladat? Ez a minősítés néha ingatag, így a következő nehézségi besorolások úgy használhatók, mint a statisztikai állítások.

A könnyebb feladatokat a *KöMaL* versenyzői egy-két órán belül megoldják. A nehezebb feladatok megoldása eltarthat néhány napig. A nehéz problémákhoz különleges képességek kellenek.

Könnyebb feladatok: 1., 2., 3., 4., 9., 10., 11., 12., 13., 14., 17., 18., 23., 52.

Nehezebb feladatok: 5., 6., 7., 8., 15., 19., 20., 22., 24., 25., 26., 27., 28., 29., 30., 31., 32., 33., 44., 47., 48., 49., 50., 51., 53., 59., 60., 61., 62., 63., 64.

Nehéz problémák: 16., 21., 34., 35., 36., 37., 38., 39., 40., 41., 42., 43., 45., 46., 54., 55., 56., 57., 58., 65.

A feladatok után, a lap alján útmutatást, ötletet találunk, ami segítheti a megoldást.

Jó-e, ha tudom egy feladatról, hogy az mások szerint nagyon nehéz?

Erdős Pál beszél erről: *Lovász kicsit később indult, mint Pósa. Az első cikkét 17 éves korában írta: Tarski egy problémáját oldotta meg. Hajnal nevetve mesélte, Lovász házi feladatnak tekintette a megoldatlan problémát. Hajnal egy pénteken a Fazekasban elmondta a problémánkat, Lovász hétfőre megcsinálta.*

Erdős Pál: Csodagyerekek,
Fizikai Szemle, 1996/8, 259–263. oldal

Mitől lesz valaki jó matematikus? Milyen tulajdonságokkal kell hogy bírjon?

Erre a riporteri kérdésre Erdős ezt válaszolta:

Nyilván elsősorban a tehetség, de ez önmagában nem elég. Kell egy bizonyos szorgalom, és kell egy bizonyos érdeklődés. Rényi szokta mondani: Ha jókedvű vagyok, akkor matematikával foglalkozom, hogy jobb kedvű legyek. Ha rosszkedvű vagyok, akkor matematikával foglalkozom, hogy elmúljon a rosszkedvem. Tehát az érdeklődés a tehetség mellett rendkívül fontos. Turán Pál is ilyen volt, úgyszólván minden körülmények között tudott matematikát csinálni, internálótáborban is, a II. világháborúban.

Kiknek szántuk ezt a könyvet?

Azoknak az Olvasóknak, akik szeretik a szép feladatokat, akiknek öröm ilyeneken gondolkodni. Olyan középiskolás diákoknak, akik matematikaversenyekre járnak, akik a *KöMaL* pontversenyének megoldói. Olyan olvasókra is számítunk, akik diákkorukban megtapasztalták, hogy érdekesek a matematikafeladatok. Erdős feladatai különleges szépségűek, a megoldások lenyűgözők.

Jelölések

A jelölések a szokásosak. Például $[a,b]$ az a és b számok legkisebb közös többszöröse, (a,b) pedig a legnagyobb közös osztója. $\lfloor x \rfloor$ jelöli az x szám egészrészét (az alsó egészrészét). A feladatokban az n és k betűk általában pozitív egész számot jelölnek, és a szám megnevezés is szinte mindig pozitív egész számot jelent.

A feladatok múltjáról több helyen tájékozódhatunk, ezekből általában egy forrást megadunk. A két leggyakoribb forrás a *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* és a *The American Mathematical Monthly*. Itt ezek rövid megnevezése *KöMaL* és *AMM*.

A kötetben alkalmazott további rövidítések:

[ES]: Erdős Pál–Surányi János: *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Polygon Kiadó – SZTE Bolyai Intézet, 1996.

[AZ]: Aigner–Ziegler: *Bizonyítások a Könyvből*, Typotex Kiadó, 2004.

[MM]: Hraskó András (szerk.): *Új matematikai mozaik*, Typotex Kiadó, 2002.

Feladatok

1. feladat

Az *n* oldalú konvex sokszög átlóinak hány metszéspontja van a sokszög belsejében, ha semelyik három átló nem megy egy ponton keresztül?

A feladat háttere

A feladat 907. sorszámmal jelent meg 1933-ban a *KöMaL*-ban. Erdős 1946-ban kitűzte a feladatot a *Monthly*ban E 750. sorszámmal.

Ezeket a hivatkozásokat ezentúl így adjuk meg:
[*KöMaL,* 1933, 907.], illetve [*AMM,* 1946, E750].

Volt régen egy népszerű, azóta legendássá vált vetélkedő a tévében, a *Ki miben tudós?*

Pataki János így emlékszik erre:

1966 tavaszán a fél ország a televízió előtt ült. Ma ez nem hír, de akkor az egyetlen csatorna nézettségét jelentette; a műsor pedig nem szappanopera vagy akciófilm volt, hanem középiskolás diákok tantárgyi vetélkedői matematikából, fizikából, történelemből. Ki miben tudós?: *ezen a néven már a második, a legelső két évvel korábban volt, 1964-ben. Akkor még nem volt televíziónk, és amikor szokás szerint lementem az első emeletre, hogy megnézzem a hihetetlenül izgalmas* Tell Vilmos *filmsorozat következő részét, a barátom szülei – orvosok – arról beszéltek, hogy a matematikavetélkedőt egy másodikos diák nyerte holtversenyben egy negyedikessel. Sokkal később megtudtam, hogy ezt a másodikos diákot Pelikán Józsefnek hívták.*

Az 1966-os verseny döntőjét már én is néztem. A verseny szóbeli volt, a rendelkezésre álló 2-3 perc gondolkodási idő után a stúdióban elhelyezett hangszigetelt fülkékben üldögélő két diák felváltva oldotta meg a feladatokat, fej fej mellett haladtak. A zsűri tagjai, három legenda, Hajós György, Rényi Alfréd és Turán Pál akadémikusok elismerően bólogattak. Az egyik feladatot még én is értettem: Hány pontban metszik egymást egy konvex sokszög átlói? A 3 perc gondolkodási idő leteltével az elsőnek sorra kerülő szemüveges diák szúrósan szembenézett a kamerával, és kimérten közölte: „Nem tudtam megoldani a feladatot." Most a másikon volt a sor, a fülkéjében lévő táblához lépett, szép tempósan fölrajzolt egy négyszöget, behúzta két átlóját, valami kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésről beszélt, aztán még annyit mondott, hogy tehát a válasz n alatt a 4. Nyolcadikos voltam, egy kukkot nem értettem az egészből, az iskolában nagyban százalékszámoltunk. A zsűri viszont elégedetten bólogatott, pontszámok gyulladtak ki, eldőlt a verseny. A győztest Lovász Lászlónak hívták.

Ötlet. Bármely két metsző átlóhoz tartozik egy metszéspont. Bármely metszésponthoz tartozik 4 csúcs.

2. feladat

Legfeljebb hány csúcsa lehet egy konvex sokszögnek, ha nincsen két szomszédos tompaszöge?

A feladat háttere

[*KöMaL*, 1933, 963.]

Ötlet. Legfeljebb hány hegyesszöge lehet egy konvex sokszögnek? Figyeljük a külső szögeket, azok összege 360°.

3. feladat

Jelentse $a_1, a_2, \ldots, a_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy tetszőleges permutációját. Bizonyítsuk be, hogy az

$$|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \ldots + |a_n - n|$$

összeg mindig páros szám.

A feladat háttere

[*KöMaL*, 1934, 977.]

Ötlet. Tekintsük az $(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \ldots + (a_n - n)$ összeget. Hogyan változik ennek a párossága, ha valamelyik zárójeles összeadandót a különbség abszolút értékére cseréljük?