

A Feynman-előadások fizikából

A Feynman-előadások fizikából

Richard P. Feynman
Robert B. Leighton
Matthew Sands



IV. kötet




TYPOTEX

A könyv megjelenését támogatta:
a Magyar Tudományos Akadémia és
a Nemzeti Kulturális Alap a kiadói program keretében.



A frissített magyar kiadás alapjául szolgált:
The Feynman Lectures on Physics
Copyright © 1965, 2006, 2010 by California Institute of Technology,
Michael A. Gottlieb, and Rudolf Pfeiffer

This edition published by arrangement with Basic Books,
an imprint of Perseus Books, LLC,
a subsidiary of Hachette Book Group Inc., New York, New York, USA.
All rights reserved.

Hungarian translation © Benkő Lázár, Nagy Elemér,
T. Pósch Margit, Telbisz Ferenc, Vesztergombi György,
Typotex, Budapest, 2021
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Szakmailag lektorálta: Patkós András

ISBN 978 963 493 124 9

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról
a www.typotex.hu és a facebook.com/typotexkiado
oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Gerner József
Borítóterv: Somogyi Péter
Készült a Séd Kft.-ben, Szekszárdon
Felelős vezető: Dránovits Anna

Tartalom

77. Elektrodinamika relativisztikus jelölésmódban	9
77.1. Négyesvektorok	9
77.2. A skalárszorzat	12
77.3. A négydimenziós gradiens	16
77.4. Elektrodinamika négydimenziós jelölésmódban	19
77.5. Mozgó töltés négyespotenciálja	21
77.6. Az elektrodinamika egyenleteinek invarianciája	23
78. A térerősségek Lorentz-transzformációja	26
78.1. Mozgó töltés négyespotenciálja	26
78.2. Állandó sebességgel haladó ponttöltés tere	29
78.3. A térerősségek relativisztikus transzformációja	34
78.4. A mozgásegyenletek relativisztikus jelölésmódban	43
79. Térenergia és térimpulzus	49
79.1. Lokális megmaradás	49
79.2. Energiamegmaradás és elektromágnesesség	51
79.3. Energiasűrűség és energiaáramlás az elektromágneses térben	53
79.4. A térenergia egyértelműségéről	57
79.5. Példák energiaáramokra	58
79.6. A térimpulzus	64
80. Elektromágneses tömeg	70
80.1. A ponttöltés térenergiája	70
80.2. Mozgó töltés térimpulzusa	71
80.3. Elektromágneses tömeg	73
80.4. Az elektron által önmagára kifejtett erő	75
80.5. Kísérletek Maxwell elméletének módosítására	78
80.6. Magerótér	90
81. Töltések mozgása elektromos és mágneses terekben	93
81.1. Mozgás homogén elektromos vagy mágneses térben	93
81.2. Impulzusmérés	94
81.3. Elektrosztatikus lencse	97

81.4.	Mágneses lencse	98
81.5.	Az elektronmikroszkóp	99
81.6.	A részecskegyorsítók pályastabilizáló terei	101
81.7.	Fókuszálás váltakozó gradiensű terekkel	105
81.8.	Mozgás a keresztezett elektromos és mágneses térben	109
82.	A kristályok belső geometriája	111
82.1.	A kristályok belső geometriája	111
82.2.	Kémiai kötés a kristályokban	114
82.3.	A kristályok növekedése	116
82.4.	A kristályrácsok	117
82.5.	Kétdimenziós szimmetriák	119
82.6.	Háromdimenziós szimmetriák	123
82.7.	A fémek szilárdsága	126
82.8.	Diszlokációk és a kristálynövekedés	129
82.9.	A Bragg–Nye-féle kristálymodell	130
83.	A tenzorok	152
83.1.	A polarizációs tenzor	152
83.2.	A tenzorkomponensek transzformálása	155
83.3.	Az energiaellipszoid	157
83.4.	Egyéb tenzorok; a tehetetlenségi tenzor	162
83.5.	A vektoriális szorzat	165
83.6.	A feszültségtenzor	166
83.7.	Magasabb rendű tenzorok	172
83.8.	Az elektromágneses impulzus négyestenzora	173
84.	Sűrű anyagok törésmutatója	177
84.1.	Az anyag polarizációja	177
84.2.	Maxwell-egyenletek dielektrikumra	180
84.3.	Hullámok a dielektrikumban	182
84.4.	A komplex törésmutató	186
84.5.	A keverék törésmutatója	188
84.6.	Hullámok fémekben	190
84.7.	Kis- és nagyfrekvenciás közelítés	191
85.	Visszaverődés felületekről	197
85.1.	A fény visszaverődése és törése	197
85.2.	Hullámok sűrű közegben	198
85.3.	A határfeltételek	202

85.4. A visszavert és az áteresztett hullám	208
85.5. Fényhullám visszaverődése fémekről	213
85.6. A teljes visszaverődés	215
86. Az anyag mágnese	218
86.1. Dia- és paramágnese	218
86.2. A mágnese és az impulzusmomentumok (perdület)	221
86.3. Az atomi mágnese precessiója	223
86.4. Diamágnese	225
86.5. A Larmor-tétel	227
86.6. Klasszikusan nincs sem dia-, sem paramágnese	229
86.7. Impulzusmomentum a kvantummechanikában	230
86.8. Az atomok mágnese energiája	234
87. Paramágnese és mágnese rezonancia	237
87.1. Kvantált mágnese állapotok	237
87.2. A Stern–Gerlach-kísérlet	239
87.3. A Rabi-féle molekulanyaláb-módszer	242
87.4. Az anyagok paramágnese	247
87.5. Hűtés adiabatikus lemágnesezéssel	251
87.6. Mágnese magrezonancia	253
88. Ferromágnese	258
88.1. Mágnesezési áramok	258
88.2. A H mágnese tér	266
88.3. A mágnesezési görbe	268
88.4. Vasmagos tekercsek	272
88.5. Elektromágnese	275
88.6. Spontán mágnesezettség	278
89. Mágnese anyagok	286
89.1. Mi a ferromágnese?	286
89.2. Termodinamikai tulajdonságok	292
89.3. A hiszterézisgörbe	295
89.4. Ferromágnese anyagok	303
89.5. Különleges mágnese anyagok	305
90. A rugalmasság	311
90.1. A Hooke-törvény	311
90.2. Homogén feszültségek	314

90.3. Csavart rúd; nyíróhullámok	320
90.4. A hajlítás	324
90.5. A kihajlás	329
91. Rugalmas anyagok	333
91.1. A nyúlási tenzor	333
91.2. A rugalmassági tenzor	337
91.3. Mozgások a rugalmas testben	341
91.4. Rugalmatlan viselkedés	346
91.5. A rugalmassági állandók kiszámítása	348
92. A „száraz víz” áramlása	355
92.1. Hidrosztatika	355
92.2. Mozgásegyenletek	358
92.3. Stacionárius áramlás. Bernoulli-törvény	363
92.4. A cirkuláció	370
92.5. Az örvényvonalak	373
93. A „nedves víz” áramlása	378
93.1. A viszkozitás	378
93.2. A viszkózus áramlás	383
93.3. A Reynolds-szám	385
93.4. Henger körül kialakuló áramlás	388
93.5. Az áramlás határesetete: a nulla viszkozitás	392
93.6. A Couette-áramlás	393
94. A görbült tér	398
94.1. Kétdimenziós görbült terek	398
94.2. Görbület háromdimenziós térben	408
94.3. A mi terünk görbült	410
94.4. Geometria a téridőben	412
94.5. A gravitáció és az ekvivalenciaelv	413
94.6. Az órák járása gravitációs térben	415
94.7. A téridő görbülete	420
94.8. Mozgás görbült téridőben	420
94.9. Einstein gravitációelmélete	424
Név- és tárgymutató	427
A kötetben bevezetett jelölések	431

77. fejezet

Elektrodinamika relativisztikus jelölésmódban

(Ebben a fejezetben: $c = 1$)

Ismétlés: 15. fejezet: Speciális relativitáselmélet; 16. fejezet: Relativisztikus energia és impulzus; 17. fejezet: Tér-idő; 65. fejezet: Magnetosztatika.

77.1. Négyesvektorok

Ebben a fejezetben a speciális relativitáselméletet alkalmazzuk az elektrodinamikára. Mivel a speciális relativitáselméletet a 15–17. fejezetekben már tanulmányoztuk, most csak a főbb gondolatokon szaladunk át.

Kísérletekkel igazolt megállapítás, hogy a fizika törvényei változatlanok maradnak, amennyiben állandó sebességgel mozgunk. Nem tudjuk például megmondani, vajon egy űrhajó belsejében ülünk-e, ha az egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, hacsak ki nem tekintünk belőle, vagy valamilyen, a külvilággal kapcsolatos megfigyelést nem végzünk. Bármely fizikailag helyes törvényt valahogy úgy kell megfogalmaznunk, hogy a természet e tulajdonságát tartalmazza.

Ha S' rendszer S -hez képest v egyenletes sebességgel halad az x irányban, akkor a két különböző S és S' koordináta-rendszerben mért idő- és helykoordináták közötti összefüggést a Lorentz-transzformáció adja:

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, & y' &= y, \\x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, & z' &= z.\end{aligned}\tag{77.1}$$

A fizika törvényeinek olyanoknak kell lenniük, hogy a Lorentz-transzformáció elvégzése után alakjuk ne változzon. Ez ugyanolyan elv, mint az, hogy a fizika törvényei koordináta-rendszerünk *irányításától* függetlenek. A 11. fejezetben láttuk, hogy a fizika törvényeinek a forgatásokkal szembeni invarianciája matematikailag *vektoregyenletekkel* fejezhető ki.

Ha például van két vektorunk

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

azt találjuk, hogy az

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

kombináció nem változik meg, ha valamely elforgatott új koordináta-rendszerre térünk át. Más szóval, tudjuk, hogy ha az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ -hez hason-

ló skalárszorzat alkotja az egyenlet két oldalát, az egyenletnek pontosan ugyanaz marad az alakja minden más elforgatott koordináta-rendszerben. Tanulmányaink során megismertünk egy operátort (lásd 54. fejezet)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

amelyet, ha valamely skalárfüggvényre alkalmazzuk, három vektorként transzformálódó mennyiséget kapunk. Ezzel az operátorral definiáltuk a gradienst, majd további vektorok kombinációjából a divergenciát és a Laplace-operátort. Végül rájöttünk, hogy ha két vektor komponensei közül bizonyosakat páronként összeszorozunk, ezek összegéből három olyan új mennyiség adódik, amelyek vektorszerűen viselkednek. A kapott mennyiséget két vektor *vektorszorzatának* neveztük. A ∇ operátorral képezett vektorszorzatot valamely vektor rotációjaként definiáltuk.

Vektor definíciója	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
Skalárszorzat	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
A derivált vektoroperátor	∇
Gradiens	$\nabla\varphi$
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{A}$
Laplace-operátor	$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$
Vektorszorzat	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
Rotáció	$\nabla \times \mathbf{A}$

77.1. táblázat. A háromdimenziós vektoranalízis fontosabb kifejezéseinek és operátorainak jegyzéke

Mivel a továbbiakban szükségünk lesz a vektoranalízis során tanultakra, a 77.1. táblázatban összesítve adtuk meg az eddigiekben alkalmazott háromdimenziós mennyiségekkel kapcsolatos legfontosabb műveleteteket. Fontos, hogy a fizika törvényeit fel tudjuk úgy írni, hogy a forgatás során mindkét oldal egyformán transzformálódjon. (Ha például az egyik oldalon vektor áll, a másik oldalon ugyanúgy vektornak kell állnia, így a koordináta-rendszer forgatásával mindkét oldal egyforma módon változik meg. Hasonlóan, ha egyik oldal skalár, a másik oldalnak is skalárnak kell lennie, stb.)

A speciális relativitáselméletben az idő és a tér fogalma elválaszthatatlanul összefonódik, ezért a most említett eljárást négy dimenzióban kell végrehajtanunk. Azt akarjuk, hogy egyenleteink *bármilyen* tehetetlenségi rendszerben változatlanok maradjanak. Ez azt jelenti, hogy egyen-

leteinknek invariánsoknak kell lenniük a (77.1) alatt megadott Lorentz-transzformációval szemben. E fejezetben azt akarjuk megmutatni, hogyan érhető ez el. Mielőtt azonban bármibe is belekezdenénk, még tennünk kell valamit, ami munkánkat majd lényegesen megkönnyíti (és egyúttal megóv néhány félreértéstől). A hosszúság- és az időegységet úgy választjuk meg, hogy a fény sebessége, c , 1-gyel legyen egyenlő. Felfoghatjuk ezt úgy is, hogy azt az *időtartamot választjuk egységnek, amely alatt a fény egy méter utat tesz meg* (ez körülbelül $3 \cdot 10^{-9}$ s). Az időegységet „egy méternek” is nevezhetnénk. Ezzel az egységgel számolva, egyenleteink világosabban tükrözik a téridő-szimmetriát, s egyúttal minden c eltűnik a relativisztikus egyenleteinkből. (Ha ez bárkit is aggasztana, a c bármikor visszahelyettesíthető akármelyik egyenletbe, t helyett ct -t írva, vagy általánosabban mindenhová c -t írva be, ahol az egyenlet dimenzióhelyessége megkívánja.) Az előkészületek után most mindazt, amit a három dimenzióban a vektorokkal tettünk, megismételjük a négydimenziós téridőben. A feladat tulajdonképpen elég egyszerű: csak az analógia alapján kell dolgoznunk. Egyedüli nehézséget a jelölések kiválasztása jelenti (háromdimenziós módszer során ugyanis már kimerítettük a vektorok jelölési lehetőségét) és az, hogy az előjelek időnként a szokásoshoz képest ellenkezőek lesznek.

Először is, a háromdimenziós vektorok mintájára definiáljuk a *négyesvektort*, mint négy elemből, a_t, a_x, a_y és a_z -ből álló mennyiséget, amely a mozgó koordináta-rendszerre való áttéréskor t, x, y és z -hez hasonló módon transzformálódik. A négyesvektorokra egész sereg jelölés lehetséges, mi a_μ -t használjuk erre a célra, ezen négy számot értünk mindig: a_t, a_x, a_y, a_z – más szavakkal, a μ index a t, x, y és z négy értékét veheti fel. Néhányszor hasznos lesz, ha a három térkomponenst egy hármisvektorral jelöljük, ilyenformán: $a_\mu = (a_t, \mathbf{a})$.

Egy négyesvektort már megismertünk az előzőek során, ezt egy részecske energiája és impulzusa alkotja (lásd 17. fejezet). Új jelölésmódunk szerint ezt így írhatjuk:

$$p_\mu = (W, \mathbf{p}), \quad (77.2)$$

ami azt jelenti, hogy a p_μ négyesvektor egy részecske W energiájából és a \mathbf{p} hármisvektor három komponenséből épül fel.

Úgy tűnik, mintha igen egyszerű dolgunk lenne: minden hármisvektorhoz megkeressük a hiányzó negyedik komponenst, és kész a négyesvektor. Ez azonban nem így van! Ennek illusztrálására vegyük szemügyre a sebességvektort három komponensével:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Mi lesz vajon az időkomponens? Ösztönösen azt gondolnánk, hogy a négyesvektorok olyanok, mint t, x, y és z , és azt hihetnénk, hogy az időkomponens

$$v_t = \frac{dt}{dt} = 1.$$

Csak hogy ez nem igaz, mert a nevezőkben levő t a Lorentz-transzformációval megváltozik. A számláló ugyan a négyesvektoroknak megfelelően viselkedik, a nevezőben szereplő dt azonban aszimmetriát okoz, és így a komponensek két különböző rendszerben más és más formát öltenek.

Az előbb felírt négy „sebességkomponens” egy négyesvektor komponenseit alkotja, csak el kell őket osztani $\sqrt{1-v^2}$ -tel. Ez belátható, hogy ha először a

$$p_\mu = (W, \mathbf{p}) = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) \quad (77.3)$$

impulzus-négyesvektort tekintjük, majd elosztjuk az m_0 nyugalmi tömeggel, ezzel a négy dimenzióban invariáns skalármennyiséggel, amikor is a

$$\frac{p_\mu}{m_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) \quad (77.4)$$

számnégyeshez jutunk, amelynek még mindig négyesvektornak kell lennie. (Invariáns skalárral való osztás a transzformációs tulajdonságokat nem változtatja meg.) Definiálhatunk tehát egy u_μ „sebességvektort” az alábbi egyenletek szerint:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, & u_y &= \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \\ u_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, & u_z &= \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (77.5)$$

A négyessebesség hasznos mennyiség, felírható például vele a következő összefüggés:

$$p_\mu = m_0 u_\mu. \quad (77.6)$$

Az egyenlet tipikusan olyan alakú, mint amilyennek a relativisztikusan helyesen felírt egyenletnek lennie kell: mindkét oldalon egy négyesvektor áll. (A jobb oldal egy invariáns skalár szorozva egy négyesvektorral, ami továbbra is négyesvektor.)

77.2. A skalárszorzat

Pusztán véletlennek is felfoghatjuk, hogy a koordináta-rendszert elforgatva, valamely pontnak a kezdőponttól mért távolsága változatlan marad. Matematikailag ez azt jelenti, hogy $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ invariáns. Más

szavakkal: forgatás után $r'^2 = r^2$, vagy

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Vajon van-e olyan mennyiség, amely a Lorentz-transzformációval szemben marad invariáns? Van. A (77.1) alapján látható, hogy

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2.$$

No, ez rendben is lenne, eltekintve attól a szépséghibától, hogy eljárásunk függ az x -tengely megválasztásától. Ezt azonban kiküszöböljük, ha a most felírt egyenletből még y^2 -et és z^2 -et is levonjuk. Az így kapott mennyiség változatlan marad tetszőleges Lorentz-transzformáció és elforgatás esetén. A háromdimenzióban felírt r^2 -hez hasonló mennyiség négy dimenzióban tehát:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Ez invariáns az úgynevezett „teljes Lorentz-csoporttal” szemben – vagyis invariáns állandó sebességű eltolással és elforgatással szemben.

Mivel a szóban forgó invariancia algebrai jellegű tulajdonság – kizárólag a (77.1)-gyel megadott transzformációs szabályoktól, valamint az elforgatástól függ –, minden négyesvektorra igaz (definíció szerint a négyesvektorok egyforma módon transzformálódnak). Tetszőleges négyesvektorra felírható tehát:

$$a_t'^2 - a_x'^2 - a_y'^2 - a_z'^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

Ezt a mennyiséget a négyesvektor „hossza” négyzetének nevezzük. (Előfordul néha, hogy a tagok előjeleit megcserélik, és az $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$ kifejezést nevezik hosszúságnak; erre jó mindig ügyelnünk.)

Ha az a_μ és b_μ két négyesvektor megfelelő komponensei egyformán transzformálódnak, akkor

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

kombináció invariáns (skalár) mennyiség. (Ezt egyébként a 17. fejezetben már bebizonyítottuk.) A kifejezés igencsak hasonlít a vektorok skalárszorzatára, a továbbiakban két *négyesvektor skalárszorzatának* is nevezhetjük és a szokásos módon egyszerűen $a_\mu b_\mu$ -vel jelöljük. *Definíció szerint* tehát:

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \quad (77.7)$$

Amikor két azonos indexet látunk (μ helyett ν -t vagy egyéb betűt is használhatunk), ez azt jelenti, hogy képeznünk kell a négy szorzatot, össze kell adnunk őket, *emlékezetben tartva*, hogy a térbeli komponensek *negatív előjelet* kapnak. Ezzel a jelölésmóddal a skalárszorzat Lorentz-transzformá-

cióval szemben mutatott invarianciája így írható fel:

$$a'_\mu b'_\mu = a_\mu b_\mu.$$

Mivel a (77.7) utolsó három tagja éppen a háromdimenzióra vonatkozó skalárszorzat, gyakran kényelmesebb ez a forma:

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Az is látnivaló, hogy a négydimenziós hosszúságot az $a_\mu a_\mu$ alakban is felírhatjuk:

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (77.8)$$

Néha egyszerűbb ugyanezt a mennyiséget a_μ^2 -tel jelölni:

$$a_\mu^2 \equiv a_\mu a_\mu.$$

Most pedig példán mutatjuk be a négyesvektorok skalárszorzatának hasznosságát. Antiprotonokat (\bar{p}) részecskegyorsítóknál a

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

reakcióval állítanak elő. A reakció során egy nagy energiájú proton neki-ütközik egy nyugalomban levő protonnak (ez utóbbi például egy, a nyaláb útjába helyezett hidrogén céltárgyban foglal helyet), s ha a bejövő protonnak elég nagy az energiája, akkor az eredeti két protonon kívül proton-antiproton pár is keletkezik.¹ Kérdés, mekkora energiájának kell lennie a berepülő protonnak, hogy a reakció energetikai szempontból lehetséges legyen.

A válaszhoz legkönnyebben úgy juthatunk el, ha megvizsgáljuk, hogyan megy végbe a reakció a tömegközépponti (TKP) rendszerben (77.1. ábra). Jelöljük a -val a berepülő protont, p_μ^a -val pedig négyesimpulzusát. Hasonlóképpen a targetprotont b -vel, négyesimpulzusát p_μ^b -vel jelöljük. Ha a bejövő protonnak *csak annyi* az energiája, hogy a reakció *éppenhogy* végbemegy, a végállapotban – azaz az ütközés utáni állapotban – egy, a

¹Felvetődhet a kérdés, hogy miért nem a

$$p + p \rightarrow p + p\bar{p},$$

vagy még inkább a

$$p + p \rightarrow p + \bar{p}$$

reakciókat vizsgáljuk, amelyek látnivalóan kevesebb energiát igényelnek. Azért, mert az úgynevezett *barionszám-megmaradás* elve kimondja, hogy a „protonok száma mínusz antiprotonok száma” nem változhat meg. Reakciónk bal oldalán a barionszám kettővel egyenlő. Ezért, ha a jobb oldalhoz egy antiprotont akarunk hozzátenni, három protonnak (vagy más barionnak) kell ugyanott szerepelnie. [A barionszám megmaradásának elvét Wigner Jenő mondta ki 1949-ben. (*A szakmai lektor kiegészítése.*)]

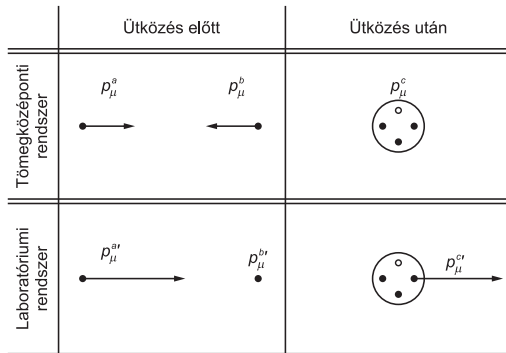
TKP-ban nyugalomban levő három protont, valamint antiprotont tartalmazó részecskecsoporthoz jelenik meg. Ha a bejövő energia egy kicsit több, a végállapot részecskéi bizonyos kinetikus energiával rendelkeznek és eltávolodnak egymástól. Végül pedig, ha az energia egy csekéllyel is kevesebb, nincs elég energia ahhoz, hogy négy részecske keletkezzen.

Jelöljük p_μ^c -vel a részecskecsoporthoz teljes négyesimpulzusát a végállapotban. Az energia- és impulzusmegmaradás összefüggései alapján felírhatjuk:

$$\mathbf{p}^a + \mathbf{p}^b = \mathbf{p}^c$$

és

$$W^a + W^b = W^c.$$



77.1. ábra. A $p + p \rightarrow 3p + \bar{p}$ reakció laboratóriumi, illetve tömegközépponti rendszerből nézve. Feltevézzük, hogy a bejövő protonnak éppen csak annyi az energiája, amennyi a reakció végbemenéséhez szükséges. A protonokat fekete, az antiprotonokat fehér körök ábrázolják

A két egyenletet összekapcsolva:

$$p_\mu^a + p_\mu^b = p_\mu^c. \tag{77.9}$$

Az eddigiekből az a lényeges, hogy az előttünk levő egyenlet négyesvektorokra érvényes, következésképpen igaz bármely tehetetlenségi rendszerben. Ez a tény felhasználható számításaink egyszerűbbé tételére. Először is, vesszük a (77.9) egyenlet mindkét oldalának „hosszát”, ezek természetesen szintén megegyeznek:

$$(p_\mu^a + p_\mu^b)(p_\mu^a + p_\mu^b) = p_\mu^c p_\mu^c. \tag{77.10}$$

Mivel $p_\mu^c p_\mu^c$ invariáns, bármely koordináta-rendszerben kiszámíthatjuk. A TKP-rendszerben p_μ^c időkomponense a négy proton nyugalmi energiája, azaz $4M$, a térbeli rész zérus; vagyis $p_\mu^c = (4M, \mathbf{0})$. Kihasználtuk azt a tényt, hogy az antiproton nyugalmi tömege egyenlő a proton nyugalmi tömegével. A közös tömeget M -mel jelöltük.

A (77.10) egyenlet ezek szerint így alakul:

$$p_\mu^a p_\mu^a + 2p_\mu^a p_\mu^b + p_\mu^b p_\mu^b = 16M^2. \tag{77.11}$$

$p_\mu^a p_\mu^a$ és $p_\mu^b p_\mu^b$ kifejezéseket könnyű meghatározni, mivel egy részecske impulzus-négyesvektorának „hossza” a részecske nyugalmi tömegének négyzetével egyenlő:

$$p_\mu p_\mu = W^2 - \mathbf{p}^2 = M^2.$$

Ezt közvetlen számolással is bebizonyíthatjuk, de egyszerűbb a dolgunk, ha észrevevessük, hogy *nyugvó részecske* esetén $p_\mu = (M, \mathbf{0})$, ennélfogva $p_\mu p_\mu = M^2$. Miután azonban $p_\mu p_\mu$ invariáns, bármilyen más rendszerben is M^2 -tel egyenlő. Ezt felhasználva a (77.11)-ben:

$$2p_\mu^a p_\mu^b = 14M^2$$

vagy

$$p_\mu^a p_\mu^b = 7M^2 \quad (77.12)$$

adódik.

Most ki kell még számítanunk $p_\mu^a p_\mu^b = p_\mu^{a'} p_\mu^{b'}$ -t a laboratóriumi rendszerben. $p_\mu^{a'}$ négyesvektor $(W^{a'}, \mathbf{p}^{a'})$ -ként írható fel, míg $p_\mu^{b'} = (M, \mathbf{0})$, mivel ez utóbbi nyugalomban levő protont ír le. Így $p_\mu^{a'} p_\mu^{b'}$ $MW^{a'}$ -val is egyenlő kell hogy legyen, s minthogy tudjuk, a skalár szorzat invariáns, egyúttal egyenlőnek kell lennie a (77.12) egyenlet által meghatározott számmal. Innen

$$W^{a'} = 7M,$$

s ez épp a keresett eredmény. A bejövő proton *teljes* energiájának legalább $7M$ -mel (azaz körülbelül 6,6 GeV-vel, minthogy $M = 938\text{MeV}$) kell egyenlőnek lennie, ami az M nyugalmi tömeget levonva, $6M$ (körülbelül 5,6 GeV) *mozgási* energiának felel meg. A Berkeley-i gyorsító a protonokat körülbelül 6,2 GeV kinetikus energiára gyorsítja fel, s így antiprotonokat is elő tudnak vele állítani.

Minthogy a skalárszorzat invariáns, érdemes minden esetben kiszámítani. Mivel egyenlő a négyessebesség $u_\mu u_\mu$ „hosszúsága”?

$$u_\mu u_\mu = u_t^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1.$$

Vagyis u_μ *egység-négyesvektort* alkot.

77.3. A négydimenziós gradiens

A következőkben meg kell beszélnünk, mi lesz a gradiensvektor négydimenziós megfelelője. Emlékeztetünk arra (14. fejezet), hogy a $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ és $\partial/\partial z$ három differenciáloperátort együttesen gradiensnek neveztük, amely úgy transzformálódik, mint egy hármassvektor. Léteznie kell hasonló

operátornak négy dimenzióban is. Azt lehetne gondolni, hogy a négydimenziós gradiens $\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$. Ez azonban nem igaz.

Hogy észrevegyük a hibát, vizsgáljunk egy skalárfüggvényt, amely csak x -től és t -től függ. φ megváltozása, amikor t -ben egy kicsiny Δt változást okozunk és ezalatt x -et rögzítve tartjuk:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta t. \quad (77.13)$$

Másrészt a mozgó megfigyelő szerint

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\Delta t'.$$

A (77.1) egyenlettel $\Delta x'$ és $\Delta t'$ kifejezhető Δt -vel. Figyelembe véve, hogy x -et rögzítve tartjuk, vagyis $\Delta x = 0$, írhatjuk:

$$\Delta x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Ennélfogva

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\Delta t\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t'}\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t'} - v\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Az eredményt (77.13)-mal egybevetve:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t'} - v\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right). \quad (77.14)$$

Hasonló számolással

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x'} - v\frac{\partial\varphi}{\partial t'}\right). \quad (77.15)$$

Láthatjuk, hogy a gradiens meglehetősen furcsa „jóság”. x -et, illetve t -t x' és t' függvényében az alábbi képletek határozzák meg [a (77.1) egyenletet megoldottuk x -re és t -re]:

$$t = \frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Így „köteles” transzformálódni egy négyesvektor. A (77.14) és (77.15) egyenletben azonban számos előjel hibás!

A hibákat úgy küszöböljük ki, hogy a hibás $(\partial/\partial t, \nabla)$ helyett a ∇_μ -vel jelölt négydimenziós gradiensoperátort a következőképp definiáljuk:

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right). \quad (77.16)$$

Ezzel a meghatározással máris eltűnnek az előjelproblémák, ∇_μ pedig úgy viselkedik, mint egy négyesvektor. (Ezek a negatív előjelek, ami igaz, az igaz, elég furcsák, de mit lehet tenni, a természet ilyen.) Természetesen az alatt, hogy ∇_μ „úgy viselkedik, mint egy négyesvektor”, egyszerűen azt

értjük, hogy valamely skalár négyesgradiense négyesvektor. Ha φ valódi skalár- (Lorentz-invariáns) tér, akkor $\nabla_\mu \varphi$ négyesvektortér.

Idáig rendben is lennénk. Most pedig, hogy van már vektorunk, gradiensünk, skalárszorzatunk, következő lépésként keressünk egy invariánst is, amely a háromdimenziós vektoranalízis divergenciájának megfelelője. Világos, hogy az analógia nyomán $\nabla_\mu b_\mu$ -t kell képeznünk, ahol b_μ valamilyen négyesvektortér, amelynek komponensei a tér és idő függvényei. Valamely $b_\mu = (b_t, \mathbf{b})$ négyesvektor *divergenciáját* ∇_μ és b_μ skalárszorzataként *definiáljuk*:

$$\nabla_\mu b_\mu = \frac{\partial}{\partial t} b_t - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) b_x - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) b_y - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) b_z = \frac{\partial}{\partial t} b_t + \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad (77.17)$$

ahol $\nabla \cdot \mathbf{b}$ a \mathbf{b} hármisvektor közös divergenciája. Az előjelekkel óvatosságnak kell lennünk. Néhány negatív előjel a skalárszorzat (77.7) definíciójából származik, a többi azért szükséges, mert ∇_μ térbeli komponensei $-\partial/\partial x$ stb., ahogy ezt (77.16) mutatja. A (77.17) egyenlettel definiált divergencia invariáns mennyiség, és az egymástól a Lorentz-transzformáció miatt különböző koordináta-rendszerekben ugyanazt az eredményt adja.

Vizsgáljunk most egy olyan fizikai példát, amelyben a négyesdivergencia jelenségét tanulmányozhatjuk. Ez utóbbi segítségével meg tudjuk például határozni a mozgó vezeték körül kialakult tereket. Előzőleg már láttuk (65. fejezet 65.7. szakasz), hogy a ρ elektromos töltés és a \mathbf{j} áramsűrűség négyesvektort alkot: $j_\mu = (\rho, \mathbf{j})$. Ha egy töltés nélküli vezetékben j_x az áramsűrűség, akkor az x -tengely mentén v sebességgel tovaladó rendszerben, a vezetékben a következő töltés-, illetve áramsűrűséget észlelhetjük [a kifejezéseket a (77.1) Lorentz-transzformáció alkalmazásával kapjuk]:

$$\rho' = \frac{-vj_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Ezek éppen azok a mennyiségek, amelyeket a 65. fejezetben egyszer már megkaptunk. Behelyettesítve ezeket a forrásokat a Maxwell-egyenletekbe, *mozgó rendszerekben* is meghatározhatók a térerősségek.

A töltésmegmaradás törvénye (lásd 65.2. szakasz) négyesvektor-jelöléssel szintén egyszerű alakú lesz. A j_μ négyesdivergenciája:

$$\nabla_\mu j_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (77.18)$$

A töltésmegmaradás törvénye szerint az egységnyi térfogatra eső kiáramlásnak egyenlőnek kell lennie a töltéssűrűség időegységre eső csökkenésé-

vel. Más szavakkal

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Ezt a (77.18) kifejezéssel összevetve, a következő egyszerű alakban írható fel a töltésmegmaradás törvénye:

$$\nabla_{\mu} j_{\mu} = 0. \quad (77.19)$$

Mint ahogy $\nabla_{\mu} j_{\mu}$ invariáns skalár, ha értéke zérus valamely rendszerben, zérus lesz bármely más rendszerben is. Tehát ha a töltés valamely koordináta-rendszerben megmarad, akkor minden egyenletes sebességgel mozgó rendszerben is megmarad.

Utolsó példaként tekintsük a ∇_{μ} gradiensoperátor önmagával való skalárszorzatát. Három dimenzióban ez a művelet a Laplace-operátort adta:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Számítsuk ki, mit kapunk négy dimenzióban. Nem is nehéz. Alkalmazzuk a skalárszorzatról, valamint a gradiensről megismert szabályokat:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \nabla_{\mu} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \end{aligned}$$

Ez a kifejezés a háromdimenziós Laplace-operátor megfelelője; d'Alembert-operátor a neve, és külön jelölése van:

$$\square^2 = \nabla_{\mu} \nabla_{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (77.20)$$

Definíciójából következően a d'Alembert-operátor invariáns skalár; négyesvektortérre alkalmazva egy új négyesvektorteret ad. [A szakirodalom tanulmányozásakor óvatosaknak kell lennünk, ugyanis a d'Alembert-operátort néha a (77.20) egyenlet (-1) -szeresével definiálják.]

Megtaláltuk tehát csaknem minden háromdimenziós mennyiség négydimenziós megfelelőjét, amelyeket annak idején a 77.1. táblázatban foglaltunk össze. (Még nem ismertük meg a vektorszorzat, illetve a rotáció operátorának analogonjait, erre majd csak a következő fejezetben kerül sor.) Hasznos ezeket a fontos definíciókat, illetve leszámaztatott mennyiségeket egy helyre felírni, ebből a célból állítottuk össze a 77.2. táblázatot.

77.4. Elektrodinamika négydimenziós jelölésmódban

A 70. fejezet 70.6. szakaszában már, nevének megemlítése nélkül, bevezettük egyszer a d'Alembert-operátort. A potenciálokra akkor felírt diffe-

Három dimenzió	
Vektor	$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$
Skalárszorzat	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
Vektoroperátor	$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$
Gradiens	$\nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Laplace-operátor	$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Négy dimenzió	
Vektor	$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \mathbf{a})$
Skalárszorzat	$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
Vektoroperátor	$\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z) = (\partial/\partial t, -\nabla)$
Gradiens	$\nabla_\mu \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \nabla \varphi \right)$
Divergencia	$\nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a}$
d'Alembert-operátor	$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square^2$

77.2. táblázat. A vektoranalízis fontosabb mennyiségei három és négy dimenzióban

renciálegyenletek az új jelölésmódban így festenek:

$$\square^2 \varphi = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \square^2 \mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \quad (77.21)$$

A (77.21) két egyenletének jobb oldalán álló négy mennyisége rendre ϱ, j_x, j_y, j_z , osztva ε_0 -val. ε_0 univerzális állandó és minden koordináta-rendszerben ugyanaz, feltéve, hogy minden koordináta-rendszerben ugyanazt a töltéssűrűséget használjuk. Így a $\varrho/\varepsilon_0, j_x/\varepsilon_0, j_y/\varepsilon_0, j_z/\varepsilon_0$ mennyiségek szintén négyesvektorokként transzformálódnak. Írjuk őket a j_μ/ε_0 alakban. A d'Alembert-operátor a koordináta-rendszer megváltozásával nem változik, tehát a φ, A_x, A_y, A_z mennyiségeknek szintén négyesvektorokként kell transzformálniuk – ami azt jelenti, hogy egy négyesvektor komponensei. Röviden az

$$A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$$

mennyiség egy négyesvektor. Az a mennyiség, amit skalár- vagy vektorpotenciáinak nevezünk, tulajdonképpen ugyanannak a fizikai mennyiségnek két különböző megnyilvánulása és együvé tartozik. Ha pedig együttes jelö-

lésmódot alkalmazunk, a világ relativisztikus invarianciája szembeszökővé válik. A_μ -t négyespotenciálnak nevezzük.

Négyesvektor-jelölésben a (77.21) egyenlet az egyszerű

$$\square^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\varepsilon_0} \quad (77.22)$$

alakot veszi fel. Fizikai tartalma pontosan ugyanaz, mint a Maxwell-egyenleteké, nagy élvezetet jelent azonban az, hogy képesek vagyunk mindent ilyen elegáns formára hozni. A csinos forma önmaga is jelent valamit: közvetlenül rámutat az elektrodinamika invarianciájára a Lorentz-transzformációval szemben.

Emlékezzünk vissza, a (77.21) egyenletet a Maxwell-egyenletekből úgy tudtuk levezetni, hogy egyidejűleg kitűztük a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (77.23)$$

mellékfeltételt, ami másképpen írva: $\nabla_\mu A_\mu = 0$. E mellékfeltétel, amelyet *Lorentz-feltételnek* neveznek, kimondja, hogy az A_μ négyesvektor négyesdivergenciája zérus. Kényelmes ezzel a feltétellel dolgoznunk, mert invariáns jellege biztosítja, hogy a Maxwell-egyenletek a (77.22) formában minden koordináta-rendszerben érvényben maradjanak.

77.5. Mozgó töltés négyespotenciálja

Jóllehet az elmondottak tulajdonképpen már magukban foglalják, írjuk le most külön-külön is azokat a transzformációs összefüggéseket, amelyek valamely mozgó rendszerben mért φ -t és \mathbf{A} -t a nyugvó rendszerben talált φ és \mathbf{A} függvényében adják meg. Minthogy $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ négyesvektor, a keresett egyenleteknek ugyanúgy kell kinézniük, ahogyan (77.1), azzal a különbséggel, hogy t helyébe φ -t, \mathbf{x} helyébe pedig \mathbf{A} -t teszünk.

Azaz:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\varphi - v A_x}{\sqrt{1 - v^2}}, & A'_y &= A_y, \\ A'_x &= \frac{a_x - v \varphi}{\sqrt{1 - v^2}}, & A'_z &= A_z. \end{aligned} \quad (77.24)$$

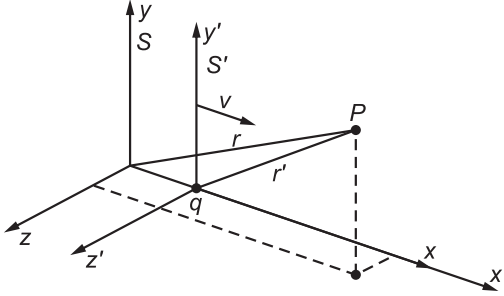
Feltételeztük, hogy a vesszős koordináta-rendszer a vesszőtlenben mérve v sebességgel mozog a pozitív x irány mentén.

A négyespotenciál fogalmának hasznosságát most egy példán keresztül mutatjuk be. Számítsuk ki az x -tengely mentén v sebességgel haladó q töltéstől származó skalár- és vektorpotenciált! A töltéssel együtt mozgó koordináta-rendszerben könnyen kiszámíthatjuk ezeket a mennyiségeket, mivel ebben a rendszerben a töltés nyugalomban van. Legyen a töltés az

S' rendszer középpontjában, ahogy az a 77.2. ábrán látható. A skalárpotenciál ebben a mozgó rendszerben

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad (77.25)$$

ahol r' a q töltés távolsága a tér P pontjától az S' rendszerben. Az \mathbf{A}' vektorpotenciál természetesen zérus.



77.2. ábra. S' rendszer v sebességgel mozog S -hez képest (az x irány mentén). Az S' középpontjában nyugvó töltés az S rendszerben az $x = vt$ helyen tartózkodik. A P pontban levő potenciálok mindkét rendszerben kiszámíthatók

A nyugvó koordináta-rendszerben mért φ és \mathbf{A} potenciál mármost igen egyszerűen adódik. A (77.24) egyenletben szereplő összefüggés megfordításából

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi' + vA'_x}{\sqrt{1-v^2}}, & A_y &= A'_y, \\ A_x &= \frac{A'_x + v\varphi'}{\sqrt{1-v^2}}, & A_z &= A'_z. \end{aligned} \quad (77.26)$$

Felhasználva a (77.25)-tel meghatározott φ -t, valamint azt, hogy $\mathbf{A}' = 0$,

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' \sqrt{1-v^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Ez utóbbi összefüggés ugyanazt a φ skalárpotenciált adja meg, amelyet S -ben észlelnénk, sajnos azonban S' koordinátaival. A (77.1) alkalmazásával viszont t', x', y' és z' -t kifejezhetjük t, x, y és z -vel. A következőt kapjuk:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{[(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]^2 + y^2 + z^2}}. \quad (77.27)$$

Ugyanezt az eljárást követve, \mathbf{A} komponensei esetén megmutatható, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{v}\varphi. \quad (77.28)$$

Az így kapott kifejezések ugyanazok, mint amelyeket a 73. fejezetben más módszerrel már levezettünk.

77.6. Az elektrodinamika egyenleteinek invarianciája

Láttuk, hogy a φ és \mathbf{A} potenciálok együttesen négyesvektort alkotnak, amelyet A_μ -nek neveztünk, és hogy a hullámegyenletek – A_μ -t a j_μ -vel meghatározó teljes egyenletrendszer – a (77.22) egyenlet kapcsán megismert formában írható fel. Ez az egyenlet, valamint a töltés megmaradása (lásd (77.19) egyenlet] adja az elektromágneses tér alapegyenletét:

$$\square^2 A_\mu = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\mu, \quad \nabla_\mu j_\mu = 0. \quad (77.29)$$

Könyvünk ilyen parányi helyén elfér az egész Maxwell-egyenletrendszer – elegánsan és egyszerűen. Vajon származott-e valami hasznunk belőle, hogy az egyenleteket ilyen formában írtuk fel, azon kívül, hogy egyszerűek és szép formájúak? Adódott-e valami különbség a régihez képest, amikor mindent kiírtunk komponensenként? Le tudunk-e vezetni valami olyat az új egyenletekből, amelyet az áramok és töltések segítségével a potenciálokra felírt hullámegyenletekből nem tudnánk megkapni? A válasz határozottan nem. Nem tettünk semmi mást, mint hogy más nevet adtunk mindennek az új jelölések bevezetésével. Egy négyzetet rajzoltunk differenciálhányadosok jelképezésére, ez azonban ezután sem jelent semmi mást, mint a t szerinti második deriváltat, mínusz az x szerinti második derivált, mínusz az y szerinti második derivált, mínusz a z szerinti második derivált. A μ pedig arra utal, hogy négy egyenlettel van dolgunk, $\mu = t, x, y$ vagy z mellett külön-külön egygel. Akkor hát mi a jelentősége annak, hogy az egyenletek ilyen egyszerű alakban írhatók fel? Olyan szempontból, hogy közvetlenül levezessünk belőlük valamit, semmi. Esetleg azonban az egyenletek egyszerűsége arról tanúskodik, hogy a természet maga is bizonyos módon egyszerű.

Bemutatók Önöknek valami érdekeset, amit épp az imént fedeztünk fel. A természet összes törvénye egyetlen egyenletben foglalható össze:

$$\cup = 0. \quad (77.30)$$

Milyen egyszerű ez az egyenlet! Szükséges természetesen tudnunk, mit jelent a \cup szimbólum.

\cup valamilyen fizikai mennyiség, amelyet a kiragadott fizikai helyzet „természetellenességének” nevezünk. Kiszámítására képlet áll rendelkezésünkre. Íme, így kell a fizikai lényeg meghatározni. Vesszünk minden fizikai törvényt, majd egy sajtáságos alakra hozzuk őket. Legyen egy kiragadott törvény például a mechanika törvénye: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, amelyet így írunk fel: $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$. Az $(\mathbf{F} - m\mathbf{a})$ mennyiséget – amelynek természetesen zérusnak kell lennie – elnevezzük a mechanika „illesztetlenségének”. Következő lépésként ezt az illesztetlenséget *négyzetre emeljük*, és \cup_1 -gyel

jelöljük, és ezt elnevezzük a mechanikai jelenségek „természetellenességének”. Más szóval, képezzük a

$$U_1 = (\mathbf{F} - m\mathbf{a})^2 \quad (77.31)$$

menntiséget. Ezután veszünk egy másik fizikai törvényt, mondjuk, azt, hogy $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, és definiáljuk az

$$U_2 = \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)^2$$

menntiséget, amelyet a „villamosságban Gauss-féle természetellenességének” keresztelünk el. Az eljárást tovább folytatva felírjuk U_3 -at, U_4 -et, s így tovább, minden ismert fizikai törvényre egy U -t.

Végül a világ *teljes* lényegén az egyes részjelenségek U_i természetellenességeinek összegét értjük, vagyis $U = \sum U_i$. A természet „nagy törvénye” ezután így fest majd:

$$U = 0. \quad (77.32)$$

Ez a „törvény” azt jelenti, hogy az egyes „illesztetlenségek” négyzeteinek összege zérus; másrészt viszont egy négyzetekből álló összeg csak úgy lehet zérus, ha maguk az egyes tagok is külön-külön zérussal egyenlők.

A (77.32) által leírt „csodálatosan egyszerű” törvény tehát tulajdonképpen az eredetileg felírt egyenletekkel egyenértékű. Ennélfogva teljesen nyilvánvaló, hogy valamely egyszerű jelölés, amely szimbólumainak egyszerűségével csupán elfedi bizonyos dolgok összetettségét, valójában nem tanúskodik igazi egyszerűségről. Az egész nem más, mint szemfényvesztés. A (77.32) egyenletben megnyilvánuló elegancia – amely onnan adódik, hogy sikerült elrejtetni benne egynéhány egyenletet – nem más, mint önámítás. Ha legöngyöliténénk az egészet, ugyanoda kerülnénk vissza, ahonnan elindultunk.

Az elektromágnesesség törvényeinek (77.29) képletben felírt alakja az egyszerűsége kívül azonban még többet *is* jelent. Többet mond ugyanabban az értelemben, mint ahogyan a vektoranalízis elmélete is többet tartalmaz. Az a tény, hogy az elektromágneses egyenletek felírhatók egy igen különös, a Lorentz-transzformációk négydimenziós geometriájához *készült* jelölésmódban – más szavakkal, egyenleteink vektoregyenletekként írhatók fel a négyestérben –, azt jelenti, hogy invariánsak a Lorentz-transzformációkkal szemben. Vagyis pontosan azért lehet egyenleteinket ilyen elegáns formába öltöztetni, mert a Maxwell-egyenletek ezekkel a transzformációkkal szemben invariánsak.

Nem véletlen tehát, hogy az elektrodinamika egyenleteit a (77.29) egyenlet elegáns alakjában tudjuk felírni. A relativitás elmélete azért fejlődött ki, mert *kísérletileg azt találták*, hogy a Maxwell-egyenletek által

megjósolt jelenségek ugyanazok minden tehetetlenségi rendszerben. Épp a Maxwell-egyenletek transzformációs tulajdonságainak tanulmányozása vezette el Lorentz-et a róla elnevezett transzformáció felfedezéséhez, s kidolgozott egy olyan transzformációt, amely a Maxwell-egyenleteket invariánsan hagyja.

Van azonban más okunk is arra, hogy egyenleteinket így írjuk fel. Einstein előzetes megsejtése nyomán ugyanis felfedezték, hogy minden fizikai törvény invariáns a Lorentz-transzformációval szemben. Ez a relativitás elve. Olyan jelölést kell tehát kitalálnunk, amely azon nyomban elárulja, hogy a felírt törvény invariáns-e vagy sem, s ez biztosít bennünket arról, hogy új elméletek felállítása során csak olyan egyenleteket próbálgatunk ki, amelyek nem mondanak ellent a relativitás elvének.

Nem csoda tehát, hogy a Maxwell-egyenletek egyszerűkké válnak ebben a sajátos jelölésmódban, hiszen a jelölésmód kigondolásánál épp ezeket vették figyelembe. Az azonban érdekes tény, hogy a fizika *bármely törvényének* – a mezonhullámok tovaterjedésétől kezdve a neutrínók viselkedéséig a β -bomlásban – rendelkeznie kell ugyanezzel az invarianciatulajdonsággal ugyanazon transzformációval szemben. Így ha egyenletes sebességgel haladó úrhajóban lennénk, a természet minden törvénye együttesen olyan módon transzformálna, hogy egyetlen új jelenség sem lépne fel. A környező világot leíró egyenletek tehát azért lesznek olyan egyszerű formájúak, ha négydimenziós vektorokkal írjuk le őket, mert a relativitás elve természeti tény.

A térerősségek Lorentz-transzformációja

(Ebben a fejezetben $c = 1$)

Ismétlés: 72. fejezet: A Maxwell-egyenleteknek a szabad térre vonatkozó megoldása

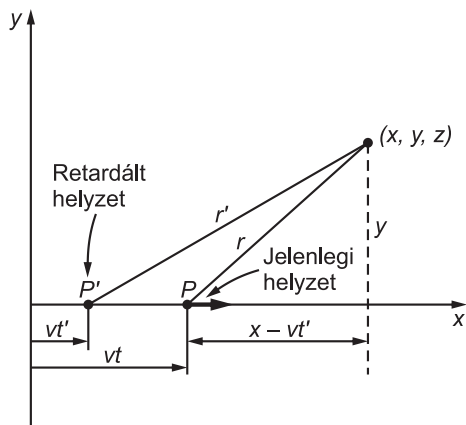
78.1. Mozgó töltés négyespotenciálja

Láttuk az előző fejezetben, hogy az $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ potenciál négyesvektort alkot, amelynek időkomponense a φ skalárpotenciál, három térbeli komponense pedig az \mathbf{A} vektorpotenciál. A Lorentz-transzformációval kiszámítottuk az egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző részecskéhez tartozó potenciálokat. (Ez utóbbiakat másfajta módon a 73. fejezetben egyszer már meghatároztuk.) Valamely ponttöltés, amely a t időpillanatban a $(vt, 0, 0)$ helyen tartózkodik, az (x, y, z) pontban az alábbi potenciálokat hozza létre:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{1/2}} \\ A_x &= \frac{qv}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{1-v^2}\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{1/2}} \\ A_y &= A_z = 0.\end{aligned}\tag{78.1}$$

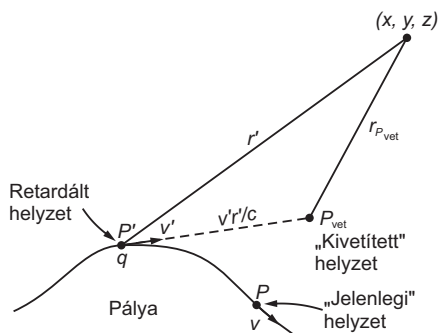
A (78.1) egyenlettel az (x, y, z) pontban és a t időpillanatban megadott potenciál olyan töltéstől származik, amely „jelenleg” (vagyis a t időpillanatban) az $x = vt$ helyen tartózkodik. Vegyük észre, hogy az egyenletekben mindenütt $x - vt$, y és z , a mozgó töltés P pontbeli pillanatnyi helyzetétől mért koordinátákat jelenti (78.1. ábra). Tudjuk azonban, hogy a tényleges hatás c sebességgel terjed, így a töltésnek csak a P' -beli retardált helyen való viselkedését kell számításba venni¹. A P' pont az $x = vt'$ helyen van (ahol $t' = t - r'/c$ a retardált idő). Mint említettük, a töltés egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez, így a P' -beli viselkedése P helyzetével közvetlen kapcsolatban áll. Valóban, ha veszünk egy további feltételt, hogy a potenciálok a töltésnek csak a retardált időpontban

¹A retardált hely vesszőkkel való jelölését nem szabad összetévesztenünk a megelőző fejezet hasonló jelölésével, ahol ez a Lorentz-transzformációval kapott új rendszert jelentette.



78.1. ábra. Az x -tengely mentén állandó v sebességgel haladó q töltés terének meghatározása az (x, y, z) pontban. A tér „most” az (x, y, z) pontban mind a töltés „jelenlegi” helyzetével, P -vel, mind „retardált” helyzetével, P' -vel kifejezhető (a $t' = t - r'/c$ időpontban)

vett helyzetétől és sebességétől függenek, a (78.1) egyenletrendszer *tökéletesen* meghatározza valamely *tetszőlegesen* mozgó töltés potenciáljait. Mégpedig a következőképpen. Végezzem a töltés egészen tetszőleges mozgást, mozogjon, mondjuk, a 78.2. ábrán látható pálya mentén, s próbáljuk megállapítani a potenciálokat az (x, y, z) pontban. Meghatározzuk mindenekelőtt a P' retardált helyet, majd ebben a pontban a v' sebességet. Ezután képzeletben tovább mozgatjuk a töltést ezzel a sebességgel $t' - t$ időn keresztül, ennek eredményeként v' sebességgel fog megérkezni a képzeletbeli P_{vet} pontba; ez utóbbit a töltés „vetített helyzetének” nevezzük. (A



78.2. ábra. A töltés valamilyen tetszőleges pályán mozog. A potenciálokat az (x, y, z) pontban és t időpillanatban a töltésnek a retardált $t - r'/c$ időben vett P' helyzete és v' sebessége határozza meg. Kényelmesen kifejezhetjük a potenciálokat a P_{vet} „vetített” koordinátákkal (t időpontban a töltés tényleges helyzete P)

töltés természetesen nem végez ilyen mozgást, t időpillanatban a P pontban van.) Az (x, y, z) pontban ekkor ugyanolyanok a potenciálok, mint amit a (78.1) egyenletek a P_{vet} pontban elképzelt töltés esetén adnának. Ezzel mindössze annyit mondtunk, hogy mivel a potenciálok csak a töltésnek a *retardált* időpontban való viselkedésétől függenek, változatlanok maradnak akkor is, ha a töltés állandó sebességgel mozog tovább, vagy

sebessége megváltozik t' után – vagyis miután az (x, y, z) pontban és t időpillanatban megjelenő potenciálokat már meghatározta.

Azt is tudjuk, hogy abban a pillanatban, amint ismerjük a tetszőlegesen mozgó töltés potenciáljait meghatározó képletet, egyúttal ismerjük az egész elektrodinamikát is; bármely más töltéseloszlástól származó potenciál a szuperpozíció segítségével már kiszámítható. Ilyen módon az elektrodinamika összes jelenségét akár a Maxwell-egyenletekben, akár a következő néhány megjegyzésben sűrítethetjük össze. (Ezek birtokában még egy lakatlan szigeten is sikerül rekonstruálnunk minden jelenséget. Természetesen a Lorentz-transzformációt is ismernünk kell, ezt azonban bizonyára még egy lakatlan szigeten sem fogják elfelejteni!)

Először is: A_μ négyesvektort alkot. *Másodszor*: valamely nyugvó töltéstől származó Coulomb-potenciál $q/4\pi\epsilon_0 r$ -rel egyenlő. *Harmadszor*: tetszőlegesen mozgó töltés által létrehozott potenciálok csak a töltés retardált időpontbeli helyétől és sebességétől függenek. E három tény megállapításával minden rendelkezésünkre áll. Minthogy A_μ négyesvektor, transzformálhatjuk az ismert Coulomb-potenciált, s így megkapjuk a potenciált állandó sebesség esetén. Ezután felhasználjuk az utolsó megállapításunkat, azaz a potenciálok csak a retardált időben vett, múltbeli sebességtől függenek; meghatározásukra működésbe léptethetjük a vetítési eljárást. A módszer persze nem valami különlegesen hasznos, érdekes azonban rámutatni, milyen sokféle formában lehet a fizika törvényeit kimondani.

Felületes emberektől hallani néha, hogy az egész elektrodinamikát le lehet vezetni kizárólag a Lorentz-transzformáció és Coulomb-törvény segítségével. Ez a kijelentés természetesen alapjában hibás. Először is, fel kell tételeznünk, hogy létezik egy skalár- és egy vektorpotenciál, amelyek együttesen négyesvektort alkotnak. Ez megmutatja, hogyan transzformálódnak a potenciálok. Továbbá, miért csupán a retardált időben lejátszódó folyamatok számítanak egyedül? Vagy pontosabban miért van az, hogy a potenciálok csak a töltés helyzetétől és sebességétől függenek, miért nem függenek például a gyorsulástól? \mathbf{E} és \mathbf{B} *térerősségek* már *függenek* a gyorsulástól, és ha ezekre nézve ugyanazt a gondolatmenetet követnénk, mint fenn, arra jutnánk, hogy ezek is csak a retardált időben vett helykoordinátáktól és sebességektől függenek. Így viszont valamely gyorsuló töltés tere ugyanolyan lenne, mint a vetített pontban elhelyezkedő töltésé – ami pedig nem igaz. A *térerősségek* a töltésnek nemcsak a helyétől és pályája menti sebességétől függenek, hanem a gyorsulástól is. Jónéhány hallgatólágos feltételezést kell tehát még hozzátennünk ahhoz az átfogó kijelentéshez, hogy minden levezethető a Lorentz-transzformációból. (Va-

lahányszor valamilyen nagy horderejű kijelentést akarunk tenni – amikor igen kis mennyiségű feltételezésből sok minden származhat –, mindannyiszor kiderül, hogy állításunk nem igaz. Általában a néhány feltétel nagyszámú hallgatólagos feltételezést foglal magában, melyeket gondosabban megvizsgálva kiderül, hogy távolról sem magától értetődőek.)

78.2. Állandó sebességgel haladó ponttöltés tere

Most, hogy valamely állandó sebességgel mozgó töltés potenciáljait már ismerjük, gyakorlati szempontok miatt szeretnénk kiszámítani a terét is. Sok esetben van dolgunk egyenletesen mozgó töltésekkel – ilyen például a ködkamrán keresztülhaladó kozmikus sugárzás, vagy a vezetőben lassan haladó elektron is. Lássuk tehát, milyenek konkrétan a térerősségek, ha a sebesség tetszőleges, akár meg is közelítheti a fény sebességét. Csupán azt tételezzük fel, hogy nincsen gyorsulás. Ez nagyon érdekes kérdés.

A megszokott módon a tereket a potenciálokból képezzük:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Legelőször E_z -re:

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

A_z azonban zérus, így a (78.1)-ben φ -t differenciálva:

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{z}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (78.2)$$

Hasonló módon kapjuk:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{y}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (78.3)$$

Az x komponens meghatározása kicsit több munkát ad. φ deriváltja valamivel bonyolultabb, és A_x sem zérus. Először is:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{(1-v^2)} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (78.4)$$

Ezután A_x -et t szerint differenciáljuk:

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{-v^2(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{(1-v^2)} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (78.5)$$

Végül képezve az összeget:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{x-vt}{\left[\frac{(x-vt)^2}{(1-v^2)} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (78.6)$$

Mielőtt \mathbf{E} fizikai jelentését megvizsgáljuk, határozzuk meg \mathbf{B} -t. A z irányú komponens

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Mivel A_y zérus, csak egy deriválást kell elvégeznünk. Vegyük észre azonban, hogy A_x éppen φv -vel egyenlő, ennek y szerinti parciális differenciálhányadosa pedig $-vE_y$. Így:

$$B_y = vE_y. \quad (78.7)$$

Hasonlóképpen

$$B_z = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = +v \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

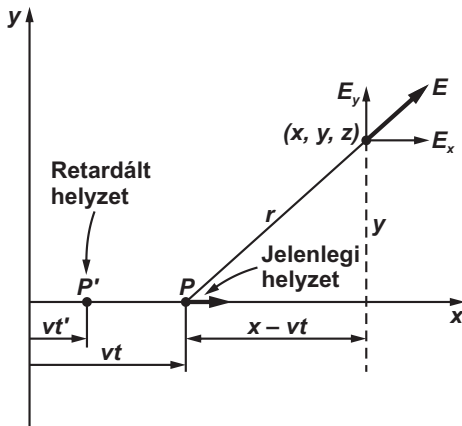
és

$$B_y = -vE_z. \quad (78.8)$$

Végül B_x zérus, minthogy mind A_y , mind A_z külön zérus. A mágneses térerősség így egyszerűen

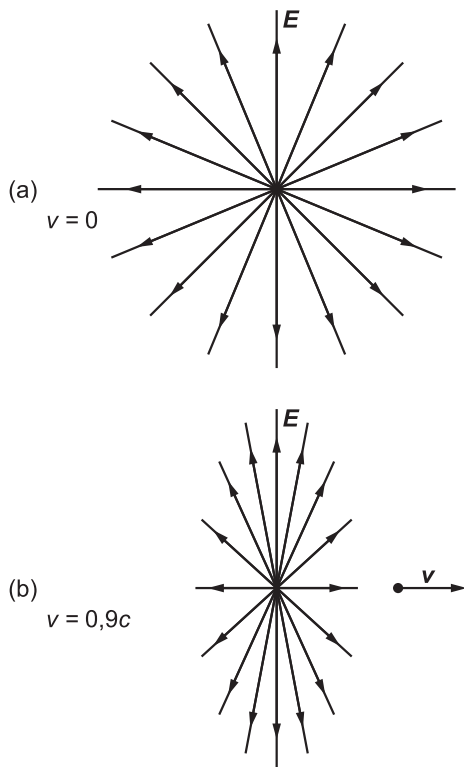
$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (78.9)$$

Lássuk most, milyen lesz a térerősségek konkrét formája. Megpróbálunk rajzot készíteni a térről a töltés aktuális helyének környezetében. Igaz ugyan, hogy bizonyos szempontból a töltés retardált helyzetéből gyakorol hatást, minthogy azonban a mozgás tökéletesen meghatározott, a retardált helyzet egyértelműen megadható az aktuális helyzet alapján. Egyenletes mozgás esetén célszerűbb a tereket a futópont koordinátaival kifejezni, mivel a térerősség komponensei az (x, y, z) pontban csak $(x - vt)$ -, y - és z -től függenek, ezek pedig éppen a futópont helyétől az (x, y, z) pontba mutató \mathbf{r} helyzetvektor komponensei (78.3. ábra).



78.3. ábra. Állandó sebességgel haladó töltés elektromos tere sugárszerűen mutat a töltés mostani helyzete irányába

Nézzük először azt a pontot, amelyre $z = 0$. \mathbf{E} -nek ekkor csak x , illetve y komponense lesz. E két komponens aránya – mint ahogy a (78.3) és a (78.6) egyenlet összevetéséből látható – éppen \mathbf{r} x és y komponensének arányával egyenlő. Ez azt jelenti, hogy \mathbf{E} ugyanabba az irányba mutat, mint \mathbf{r} , ahogy ezt a 78.3. ábra mutatja. Mivel E_z szintén arányos z -vel, nyilvánvaló, hogy eredményünk három dimenzióban is érvényes. Röviden szólva, az elektromos tér sugárirányú, és közvetlenül a töltésből indul ki, pontosan úgy, mint ahogy a nyugvó töltés esetében is láttuk. Az $1 - v^2$ járulékos tényező fellépése miatt természetesen mégsem lesz egészen ugyanolyan. Meg lehet mutatni azonban egy érdekes összefüggést, éspedig azt, hogy a két tér között ugyanolyan különbség van, mintha a töltés Coulomb-terét valamely különleges koordináta-rendszerben vettük volna fel, ahol az x távolságok $\sqrt{1 - v^2}$ -es tényezővel megrövidültek volna. Ilyen ábrázolásban az erővonalak a töltés előtt és mögött szétterülnek, oldalt pedig összesűrűsödnek (lásd 78.4. ábra).



78.4. ábra. A $v = 0,9c$ állandó sebességgel mozgó töltés tere (b ábra) összehasonlítása a nyugvó töltés terével (a ábra)

Ha az \mathbf{E} térerősség nagyságát a szokott módon összefüggésbe hozzuk az erővonalak sűrűségével, azt találjuk, hogy a töltéstől oldalirányban

erősebb, előtte és mögötte viszont gyengébb tér alakul ki, ami egyezik az egyenleteink által mondottakkal. Vizsgáljuk meg először is a térerősség nagyságát a mozgásra merőleges irányban, azaz legyen $x - vt = 0$. A töltéstől számított távolság ekkor $\sqrt{y^2 + z^2}$. A teljes tér nagysága $\sqrt{E_y^2 + E_z^2}$. Azaz

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{y^2 + z^2}. \quad (78.10)$$

A tér fordítottan arányos a távolság négyzetével – pontosan úgy, ahogy a Coulomb-tér is, kivéve, hogy tartalmaz még egy további $1/\sqrt{1-v^2}$ tényezőt is, amely az egységnél mindig nagyobb. Egy mozgó töltésre *oldalirányból* tekintve, tehát mindig nagyobb elektromos térerősséget észlelünk, mint amekkorát a Coulomb-tér adna. Pontosabban, a tér oldalirányban annival nagyobb a Coulomb-térnél, ahogyan a részecske energiája aránylik nyugalmi tömegéhez.

A töltés előtt (és mögötte) y és z zérus, és

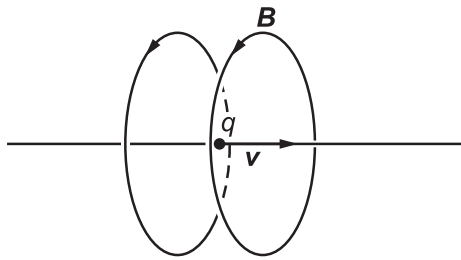
$$E = E_x = \frac{q(1-v^2)}{4\pi\epsilon_0(x-vt)^2}. \quad (78.11)$$

A tér ismét a töltéstől mért távolság négyzetével fordítva változik, ez esetben azonban $(1-v^2)$ -tel arányban *lecsökken*, megegyezésben az erővonalak képével. Ha v/c kicsi, v^2/c^2 még kisebb, így az $(1-v^2)$ tényező hatása elhanyagolható; visszakapjuk a Coulomb-törvényt. Ha azonban a részecske sebessége igen közel kerül a fény sebességéhez, a tér haladási irányában rendkívül nagy mértékben lecsökken, oldalirányban pedig tetemesen megnő.

Valamely töltés elektromos terére vonatkozó eredményeinket a következőképpen is megfogalmazhatjuk. Rajzoljuk fel egy darabka papírra a nyugvó töltés erővonalait, majd mozgassuk v sebességgel a papírdarabot. Így természetesen az egész ábra be fog lapulni a Lorentz-kontrakció következtében, a papírra rajzolt grafitszemcsék más-más helyre kerülnek. Az egészben az a csodálatos, hogy a repülő papírdarabkán látható rajz továbbra is hű képe lesz a ponttöltés erővonalainak. A kontrakció összehúzza őket oldalirányban, elől és hátul pedig szétteríti, mégpedig éppen a megfelelő módon, amely a helyes erővonal-sűrűséghez vezet. Előzőleg már hangsúlyoztuk, hogy az erővonalak nem valóságosak, csupán segédeszközüül szolgálnak a terek egy lehetséges ábrázolásában. Ez esetben azonban úgy tűnik, mintha az erővonalak is reálisak volnának. Ha ugyanis a vázolt speciális esetben tévedésből azt gondolnánk, hogy a térben tényleg ott húzódnak az erővonalak, és megpróbálnánk transzformálni őket, a helyes térerősségekhez jutnánk. Ez azonban egy cseppet sem teszi valóságosab-

bakká az erővonalakat. Ennek belátására nem kell mást tennünk, mint magunk elé idéznünk azt az esetet, amikor az elektromos tér töltés és mágnes együttes hatása révén keletkezik. A mágnes mozgásakor egy újfajta elektromos tér is létrejön, amely elrontja a kialakult szép képet. A rajz összehúzóásával kapcsolatos megkapó elgondolás általában tehát nem érvényes. Mindenesetre ügyes módszer arra, hogy megjegyezzük, hogyan alakul a gyorsan mozgó töltés tere.

A (78.9) egyenlet szerint a mágneses teret a $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ vektorszorzat adja. Ha a sebesség vektorszorzatát a töltésből sugárirányban kifelé haladó \mathbf{E} vektorral képezzük, eredményül a mozgási irány körül gyűrűző \mathbf{B} vektort kapunk (lásd 78.5. ábra). c visszairása után látható, hogy ugyanazt az eredményt kaptuk, mint amikor a töltés lassan mozgó. Írjuk fel az erőtör-



78.5. ábra. Mozgó töltés környezetében a mágneses térerősség $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ -vel egyenlő (Vesd össze a 78.4. ábrával!)

vényt, hogy lássuk, miként kell a c -t visszahelyettesíteni az egyenletbe:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Látjuk, hogy a mágneses indukcióerősség és a sebesség szorzatának ugyanolyan dimenziójúnak kell lennie, mint az elektromos térerősségnek. A (78.9) jobb oldalán tehát egy $1/c^2$ -es tényezőnek kell állania:

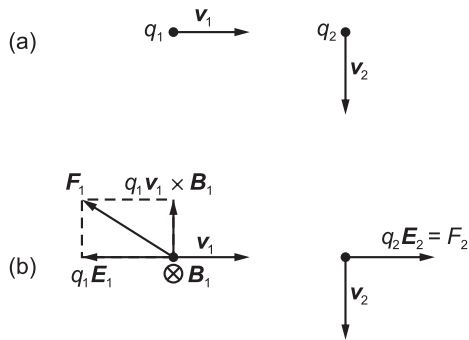
$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (78.12)$$

Ha lassan mozog a töltés ($v \ll c$), akkor \mathbf{E} helyébe a Coulomb-teret írhatjuk, így

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (78.13)$$

Ez az egyenlet tökéletesen megfelel az áram által gerjesztett mágneses teret leíró egyenletnek, amelyet a 66.7. szakaszban már levezettünk.

Ha már itt tartunk, szeretnék bemutatni valami érdekességet, amelyen el lehet gondolkozni. (Később még visszatérünk rá.) Képzeljünk el két protont, amelyek egymásra merőleges irányú sebességgel mozognak. Így az egyik keresztezi a másik pályáját, de még azelőtt, mielőtt a másik odaérkezett volna, vagyis nem ütköznek össze. Valamely időpontban a



78.6. ábra. Két mozgó töltés között ható erők nem mindig egyenlő nagyságúak és ellentétes irányúak. Úgy tűnik, mintha a „hatás” nem lenne egyenlő az „ellenhatással”

78.6 ábrán látható módon helyezkednek el. Tekintsük most a q_2 által q_1 -re gyakorolt erőt, majd megfordítva. q_1 csak elektromos erővel hat q_2 -re, hiszen q_1 nem gerjeszt mágneses teret mozgásának vonalán. q_1 -re szintén hat elektromos erő, ehhez azonban hozzájárul még egy mágneses erő is, mint-hogy az a q_2 által gerjesztett \mathbf{B} térben mozog. Az erőviszonyokat a 78.6b ábra szemlélteti. A q_1 -re, illetve q_2 -re ható elektromos erők egyenlők és ellentétesek. Ezzel szemben, míg q_1 -re hat egy oldalirányú (mágneses) erő is, q_2 esetében ilyen nem létezik. Lehet, hogy a hatás esetleg nem egyenlő az ellenhatással? Ezen lehet gondolkozni!

78.3. A térerősségek relativisztikus transzformációja

Az előző szakaszban a transzformált potenciálok segítségével kiszámítottuk az elektromos és a mágneses teret. A terek ismerete fontos, bár korábban azt is megállapítottuk, hogy maguk a potenciálok valóságosak és lehet nekik fizikai jelentést tulajdonítani. A tér szintén valóságos. Sok szempontból hasznos lenne, ha ismernénk egy olyan módszert, amelyikkel kiszámíthatjuk valamely mozgó rendszerben a térerősségeket, ha valamilyen „nyugvó” rendszerben már ismerjük őket. Mivel A_μ négyesvektort alkot, φ és \mathbf{A} transzformációs tulajdonságát már ismerjük. Ezúttal \mathbf{E} és \mathbf{B} transzformációs szabályait szeretnénk megismerni: Ha egy rendszerben \mathbf{E} és \mathbf{B} adottak, hogyan viselkednek ezek valamely mellettük elhaladó másik rendszerben? A transzformáció ismerete kényelmi szempontból jó, a tereket egyébként bármikor a potenciálokból is visszaszámíthatjuk, néha azonban hasznos, ha közvetlenül is transzformálhatjuk őket.

Hogyan állíthatnánk elő a térerősségek transzformációs szabályait? φ -t és \mathbf{A} -t már ismerjük, azt is tudjuk, hogyan lehet segítségükkel kifejezni a tereket – \mathbf{B} és \mathbf{E} transzformációjának megtalálása tehát nem okozhat különösebb nehézséget. (Úgy okoskodhatnánk, hogy minden hármisvekt-

torhoz tartoznia kell még egy további mennyiségnek, amely azt négyesvektorra egészíti ki. Így \mathbf{E} esetében is azt a mennyiséget kell megtalálni, amelyet aztán negyedik komponensnek lehetne tekinteni. Tehát hasonlóképpen kellene eljárni \mathbf{B} -vel. Csakhogy nem ez a helyzet. Egészen mást kapunk, mint amit várunk.) Kezdjük talán a \mathbf{B} mágneses térerősséggel, ez mint ismeretes, $\nabla \times \mathbf{A}$ -val egyenlő. Mármost tudjuk, hogy a vektorpotenciál az x , y és z komponenseivel csak részét alkotja valaminek, létezik egy t komponens is. Hasonlóképpen a ∇ deriváltoperátor x , y és z része mellett ott van még egy t szerinti derivált is. Nézzük akkor meg, mi történne, ha y vagy esetleg z helyére t -t íránk, vagy ehhez hasonlót.

Vizsgáljuk meg először is a komponensenként kiírt $\nabla \times \mathbf{A}$ tagjainak szerkezetét:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (78.14)$$

Az x komponens két tagból áll, amelyek csak y és z komponenseket tartalmaznak. Nevezzük el a deriváltak és komponensek ezen kombinációját „ zy -os valaminek”, s adjunk neki egy rövid jelölést: F_{zy} . Azaz egyszerűen:

$$F_{zy} \equiv \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (78.15)$$

Hasonlóképpen B_y is egy ilyenfajta „valamivel” egyenlő, ez esetben azonban egy „ xz -s valaminek”, és természetesen B_z -nek is megfelel egy „ yx -es valami”. Azaz:

$$B_x = F_{zy}, \quad B_y = F_{xz}, \quad B_z = F_{yx}. \quad (78.16)$$

Mi lenne akkor, ha kiokoskodnánk a fentiekhez hasonló „ t ” típusú mennyiségeket is, mint például F_{xt} meg F_{tz} és így tovább (minthogy a természetnek szimmetrikusnak kell lennie x -, y -, z - és t -ben)? Mi lesz például F_{tz} ? Nyilvánvalóan nem más, mint

$$\frac{\partial A_t}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Emlékezzünk azonban vissza, hogy $A_t = \varphi$, így

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Ezzel a kifejezéssel pedig mintha már előbb találkoztunk volna; \mathbf{E} -nek z komponensével volt majdnem egyenlő – egy előjeltől eltekintve. F_{tz} felírásakor azonban elfeledkeztünk arról, hogy a négydimenziós gradiensben a t szerinti derivált az x , y és z szerinti deriváltakhoz képest ellenkező előjellel szerepel. F_{tz} részére tehát az alábbi következetesebb kiterjesztést

kell elfogadnunk:

$$F_{tz} = \frac{\partial A_t}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (78.17)$$

Így már pontosan megegyezik $-E_z$ -vel. F_{tx} -szel és F_{ty} -nal hasonlóképpen próbálkozva, rendre felírhatjuk:

$$F_{tx} = -E_x, \quad F_{ty} = -E_y, \quad F_{tz} = -E_z. \quad (78.18)$$

De mi van akkor, ha mindkét index t ? Vagy hasonlóan, mindkét index x ? Ilyesmiket kapunk, hogy

$$F_{tt} = \frac{\partial A_t}{\partial t} - \frac{\partial A_t}{\partial t}$$

és

$$F_{xx} = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x},$$

ezek értéke pedig zérus.

Hat darab ilyen F -ünk lesz. Lenne még további hat az előbbieket indexeinek megcserélésével, ezek azonban valójában nem újak, hiszen

$$F_{xy} = -F_{yx} \quad \text{stb.}$$

A négyféle index párosításából adódó 16 lehetséges kombináció közül tehát csak hat különböző fizikai mennyiség származtatható; *ez a hat mennyiség felel meg \mathbf{E} és \mathbf{B} komponenseinek.*

F általános komponensét a μ és ν indexekkel szimbolizáljuk, ahol μ is és ν is a 0, 1, 2 vagy 3 értéket veszi fel. Ezek a számok a megszokott négyesvektor-jelöléseink t, x, y és z betűinek felelnek meg. Négyesvektor-jelöléseinkkel továbbá összhangban marad minden, ha definiálunk egy $F_{\mu\nu}$ mennyiséget az

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (78.19)$$

egyenlet szerint, megjegyezve, hogy $\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z)$ és $A_\mu = (\varphi, a_x, A_y, A_z)$.

Arra az eredményre jutottunk, hogy a természetben hat egymáshoz tartozó mennyiség létezik, amelyek ugyanannak a dolognak csupán más megnyilvánulási formái. Az elektromos és mágneses tér, amelyeket a lassú mozgások világában (ahol a fénysebesség messze nem jön számításba) különálló vektoroknak tekintettünk, a négyestérben többé már nem lesz vektor. Ehelyett egy újfajta „valaminek” alkotják a részeit. A fizikai „tér” valójában az $F_{\mu\nu}$ hatkomponensű objektum. A relativitás elmélete nézőpontjából ilyennek kell tekintenünk. A 78.1. táblázatban összefoglaljuk $F_{\mu\nu}$ megismert tulajdonságait.

Amint látják, tulajdonképpen nem tettünk mást, mint hogy általánosítottuk a vektorszorzatot. A rotáció operációjából, valamint abból indul-

$$\begin{array}{c}
 \hline
 F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \\
 F_{\mu\mu} = 0 \\
 F_{xy} = -B_z \quad F_{xt} = E_x \\
 F_{yz} = -B_x \quad F_{yt} = E_y \\
 F_{zx} = -B_y \quad F_{zt} = E_z \\
 \hline
 \end{array}$$

78.1. táblázat. $F_{\mu\nu}$ komponensei

tunk ki, hogy a rotáció műveletének transzformációs tulajdonságai ugyanolyanok, mint *két* vektor transzformációs tulajdonságáé – a háromdimenziós \mathbf{A} vektoré, valamint a gradiensoperátoré, amelyről már tudjuk, hogy szintén vektorként viselkedik. Nézzünk meg most egy közönséges háromdimenziós vektorszorzatot, például valamely részecske impulzusmomentumát. Amikor egy tárgy síkmozgást végez, az $(xv_y - yv_x)$ mennyiség lényeges szerepet kap. Háromdimenziós mozgás esetén három hasonló mennyiség lép fel. Ezeket impulzusmomentumnak nevezzük:

$$L_{xy} = m(xv_y - yv_x), \quad L_{yz} = m(yv_z - zv_y), \quad L_{zx} = m(zv_x - xv_z).$$

Talán már el is felejtették, hogy a 20. fejezetben észrevettük azt a különös jelenséget, hogy ez a három mennyiség egy vektor három komponenseként fogható fel. Ennek érdekében be kellett vezetnünk egy mesterséges, úgynevezett „jobbkez-szabályt”. Ez azonban csupán a véletlen műveként adódott így. L_{ij} (ahol i és j x -szel, y -nal vagy z -vel egyenlő) ugyanis antiszimmetrikus tulajdonsággal rendelkezett:

$$L_{ij} = -L_{ji}, \quad L_{ii} = 0.$$

A lehetséges kilenc mennyiségből így tulajdonképpen csak három maradt független, és úgy adódott, hogy a koordináta-rendszer megváltozásakor ez a három mennyiség pontosan úgy transzformálódott, ahogy a vektorok három komponense.

Ugyanez a helyzet a felületelem vektora esetében is. A felületelem mindig két részből tevődik össze – legyen ez dx és dy –, amelyet felírhatunk egy, a felületelemre merőleges $d\mathbf{a}$ vektor alakjában is. Négy dimenzióban azonban ugyanezt már nem tehetjük meg. Mi legyen ott például a $(dxdy)$ -ra „merőleges” irány, a z vagy a t irány?

Röviden, három dimenzióban a véletlen szerencse folytán két vektor L_{ij} típusú kombinációja ismét vektorként fogható fel, mivel ezáltal pontosan három elemet kapunk, és ezek éppen a vektor komponenseinek mintájára transzformálódnak. Négy dimenzióban ugyanez nyilvánvalóan le-

hetetlen, hiszen itt hat független elem van, hat elemet pedig nyilván nem képviselhet négy.

Még három dimenzióban is létrehozhatunk olyan vektorkombinációkat, amelyeket nem helyettesíthetünk vektorokkal. Tekintsünk két tetszőleges $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ és $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektort, s képezzük elemeiknek összes lehetséges ilyenfajta kombinációját, hogy $a_x b_x, a_x b_y$ stb. Összesen kilenc mennyiség adódik:

$$\begin{array}{lll} a_x b_x, & a_x b_y, & a_x b_z, \\ a_y b_x, & a_y b_y, & a_y b_z, \\ a_z b_x, & a_z b_y, & a_z b_z. \end{array}$$

Jelöljük ezeket T_{ij} -vel.

Ha most egy (mondjuk, a z -tengely körül) elforgatott rendszerbe térünk át, mind \mathbf{a} , mind pedig \mathbf{b} komponensei megváltoznak. Az új rendszerben a_x például az

$$a'_x = a_x \cos \vartheta + a_y \sin \vartheta,$$

b_y pedig a

$$b'_y = b_y \cos \vartheta - b_x \sin \vartheta$$

kifejezésbe megy át. Hasonlóan a többi komponens is. A szorzatokból álló, fent bevezetett T_{ij} mennyiség kilenc eleme természetesen szintén megváltozik. $T_{xy} = a_x b_y$ például a következő alakú lesz:

$$T'_{xy} = a_x b_y (\cos^2 \vartheta) - a_x b_x (\cos \vartheta \sin \vartheta) + a_y b_y (\sin \vartheta \cos \vartheta) - a_y b_x (\sin^2 \vartheta),$$

vagy másképpen

$$T'_{xy} = T_{xy} \cos^2 \vartheta - T_{xx} \cos \vartheta \sin \vartheta + T_{yy} \sin \vartheta \cos \vartheta - T_{yx} \sin^2 \vartheta.$$

T'_{ij} minden komponense T_{ij} komponenseinek lineáris kombinációja.

Arra a felismerésre jutottunk tehát, hogy két vektorból nemcsak „vektorszorzat” képezhető – ilyen például $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, amelynek három komponense van, és ezek vektorként transzformálódnak –, hanem kialakítható egy T_{ij} -hez hasonló másfajta „szorzat” is kilenc olyan komponenssel, amelyek forgatáskor az előzőkből már nyomon követhető szabályok szerint transzformálódnak. Azt a mennyiséget, amelynek egy helyett két indexe van, *tenzornak* nevezzük. Pontosabban „másodrendű” tenzornak, a fenti eljárás ugyanis három vektorral is elvégezhető, amelynek során harmadrendű tenzorhoz jutunk, vagy négygel, ami negyedrendű tenzort ad stb. Az elsőrendű tenzor a vektor.

Az a lényeg, hogy az $F_{\mu\nu}$ elektromágneses mennyiség másodrendű tenzor, mivel két indexe van. Ezt a tenzort azonban négy dimenzióban értelmeztük. A tenzor sajátos módon transzformálódik, úgy mint két

vektor szorzata – egy pillanat múlva meg is határozzuk. Ha $F_{\mu\nu}$ indexeit felcseréljük, előjele ellenkezőjére változik. Ez az a speciális eset, amelyet *antiszimmetrikus tenzornak nevezünk*. Megállapíthatjuk tehát: az elektromágneses teret egy négydimenziós másodrendű antiszimmetrikus tenzor elemei adják.

Jó nagy utat tettünk meg idáig! Emlékezzünk vissza, amikor még csak a sebességet definiáltuk, most pedig már „négy dimenzióban értelmezett másodrendű antiszimmetrikus tenzorokról” beszélünk.

Következő lépésként meg akarjuk találni $F_{\mu\nu}$ transzformációs szabályait. Ez nem lesz nehéz, csupán egy kis fáradságot igényel – sok ész nem kell hozzá, csak egy kis munka. Meg akarjuk határozni $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ Lorentz-transzformációját. Mivel ∇_μ speciális vektorokat jelent, dolgozhatunk helyette valamilyen általános antiszimmetrikus vektorkombinációval is, melyet $G_{\mu\nu}$ -nek nevezünk:

$$G_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu. \quad (78.20)$$

(A mi esetünkben a_μ helyébe alkalomadtán majd ∇_μ -t, b_μ helyébe pedig A_μ -t írunk.) a_μ és b_μ komponensei a Lorentz-transzformáció szerint transzformálódnak, azaz:

$$\begin{aligned} a'_t &= \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_t &= \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_x &= \frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_x &= \frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}}, \\ a'_y &= a_y, & b'_y &= b_y, \\ a'_z &= a_z, & b'_z &= b_z. \end{aligned} \quad (78.21)$$

Transzformáljuk ezek után $G_{\mu\nu}$ komponenseit. Kezdjük talán G_{tx} -szel:

$$\begin{aligned} G'_{tx} &= a'_t b'_x - a'_x b'_t \\ &= \left(\frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left(\frac{b_x - vb_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) - \left(\frac{a_x - va_t}{\sqrt{1-v^2}} \right) \left(\frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} \right) \\ &= a_t b_x - a_x b_t. \end{aligned}$$

Ez azonban éppen G_{tx} ; eredményünk tehát egyszerűen:

$$G'_{tx} = G_{tx}.$$

Továbbmenve egy lépéssel:

$$G'_{ty} = \frac{a_t - va_x}{\sqrt{1-v^2}} b_y - a_y \frac{b_t - vb_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(a_t b_y - a_y b_t) - v(a_x b_y - a_y b_x)}{\sqrt{1-v^2}},$$

vagyis

$$G'_{ty} = \frac{G_{ty} - vG_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Végül ugyanígy:

$$G'_{tz} = \frac{G_{tz} - vG_{xz}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Most már világos, mi lesz a többi elemmel. Foglaljuk össze mind a hat elemet, de írjunk most már $F_{\mu\nu}$ -t:

$$\begin{aligned} F'_{tx} &= F_{tx}, & F'_{xy} &= \frac{F_{xy} - vF_{ty}}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ F'_{ty} &= \frac{F_{tz} - vF_{xy}}{\sqrt{1 - v^2}}, & F'_{yz} &= F_{yz}, \\ F'_{tz} &= \frac{F_{tz} - vF_{xz}}{\sqrt{1 - v^2}}, & F'_{zx} &= \frac{F_{zx} - vF_{zt}}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned} \quad (78.22)$$

Természetesen még fennáll, hogy $F'_{\mu\nu} = -F'_{\nu\mu}$ és $F'_{\mu\mu} = 0$.

Megvan tehát az elektromos és mágneses térerősségek transzformációja. Most már csak rá kell nézni a 78.1. táblázatra, hogy az általános $F_{\mu\nu}$ jelölést újra felcseréljük \mathbf{E} -re és \mathbf{B} -re. Ez csak egyszerű helyettesítés. Hogy képleteinkben a megszokott jelölések legyenek, a 78.2. táblázatban ismét a térerősség komponensével írjuk fel őket.

$$\begin{array}{cc} \hline E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2}} & B'_y = \frac{B_y + vE_z}{\sqrt{1 - v^2}} \\ E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2}} & B'_z = \frac{B_z - vE_y}{\sqrt{1 - v^2}} \\ \hline \end{array}$$

78.2. táblázat. Az elektromos és mágneses térerősségek Lorentz-transzformációja ($c = 1$)

A 78.2. táblázatba összegyűjtött egyenletek megmutatják, hogyan változik meg \mathbf{E} és \mathbf{B} egyik tehetetlenségi rendszerből egy másikra áttérve. Ha valamilyen rendszerben ismerjük \mathbf{E} -t és \mathbf{B} -t, mindkettőt meg tudjuk határozni egy másik, ehhez képest v sebességgel mozgó rendszerben is.

Egyenleteinket egyszerű módon átírhatjuk könnyebben megjegyezhető formára is, csak észre kell vennünk, hogy mivel a v sebesség x irányú, minden v -vel megszorozott tag vagy $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ vagy $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ vektorszorzat komponense. Transzformációnkat átírhatjuk tehát a 78.3. táblázatban látható módon.

Így jobban emlékezetünkbe véshetjük, hogy melyik komponens hová tartozik. Sőt, még egyszerűbb formában is felírhatjuk transzformációs szabályunkat, ha az x irányú térerősség-komponenseket E_{\parallel} és B_{\parallel} „párhu-

$$\begin{array}{l}
 \hline
 E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x \\
 E'_y = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_y}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad B'_y = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_y}{\sqrt{1 - v^2}} \\
 E'_z = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_z}{\sqrt{1 - v^2}} \qquad B'_z = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E})_z}{\sqrt{1 - v^2}} \\
 \hline
 \end{array}$$

78.3. táblázat. A térerősségek transzformációs képleteinek másik változata ($c = 1$)

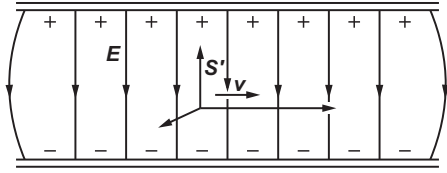
zamos” komponensekként definiáljuk (minthogy S és S' rendszerek relatív sebességével párhuzamosnak adódnak), továbbá bizonyos teljes transzverzális komponenseket – azaz az y és z irányú komponensek vektorális összegét – E_\perp , illetve B_\perp „merőleges” komponensekként fogjuk fel. Ily módon a 78.4. táblázatban látható egyenletekhez jutunk. (Visszaírtuk még a c -ket is, hogy a későbbi hivatkozások során könnyebben dolgozhassunk velük.)

$$\begin{array}{l}
 \hline
 E'_\parallel = E_\parallel \qquad B'_\parallel = B_\parallel \\
 E'_\perp = \frac{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_\perp}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad B'_\perp = \frac{(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2})_\perp}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 \hline
 \end{array}$$

78.4. táblázat. \mathbf{E} és \mathbf{B} Lorentz-transzformációjának egy további változata

A térerősségek transzformációs szabálya új módszert ad néhány korábban már ismertetett feladat megoldásához. Amikor például egy mozgó ponttöltés terét kellett meghatározni, akkor előbb differenciáltuk a potenciálokat. Most ugyanezt elérhetjük a Coulomb-tér transzformálásával. A nyugvó S rendszerben levő ponttöltés csak egyszerű sugárirányú \mathbf{E} teret kelt. Az S' rendszerben u sebességgel haladó ponttöltést észlelünk, ha az S' rendszer S -hez képest $v = -u$ sebességgel mozog. Az Olvasóra bízom annak igazolását, hogy a 78.3. és a 78.4. táblázatban összefoglalt transzformációk ugyanazt az elektromos és mágneses teret adják, mint amit a 78.2 szakaszban levezettünk.

A 78.2. táblázatban található transzformáció érdekes és egyszerű választ ad arra a kérdésre, hogy mit tapasztalunk, ha rögzített töltések *tet-szőleges* elrendezéséhez viszonyítva mozgunk. Szeretnénk például meghatározni a térerősségeket a *hozzánk* rögzített S' rendszerben, ha a 78.7. ábrán feltüntetett módon egy kondenzátor lemezei között haladunk keresztül. (Természetesen ugyanezt úgy is mondhatnánk, hogy a feltöltött

78.7. ábra. Az elektrosztatikus térben keresztülhaladó S' koordináta-rendszer

kondenzátor mozogjon *hosszánk képest*.) Mit észlelünk most? Ez esetben könnyű elvégeznünk a transzformációt, mivel \mathbf{B} az eredeti rendszerben zérus. Legyen mozgásunk \mathbf{E} -re merőleges, ekkor $\mathbf{E}' = \mathbf{E}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ teret észlelünk, amely továbbra is teljesen transzverzális. Ezenkívül megjelenik még egy $\mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}'/c^2$ mágneses tér is. (Ebben a képletben nem szerepel a $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ kifejezés, mert \mathbf{E} helyett már \mathbf{E}' -t írunk, amely természetesen ugyanúgy jó.) Amikor tehát sztatikus térben a térre merőleges irányban haladunk, egy járulékos transzverzális \mathbf{B} teret észlelünk. Ha mozgásunk \mathbf{E} -re nem merőleges, \mathbf{E} -t felbontjuk egy E_{\parallel} és egy E_{\perp} összetevőre. A párhuzamos komponens változatlan marad: $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$; a merőleges komponens pedig olyan lesz, mint amit éppen az előbb láttunk.

Vegyük most az ellenkező esetet, és képzeljük el, hogy tiszta *mágneses* térben haladunk keresztül. Ez esetben egy $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'$ *elektromos* teret észlelünk, és a mágneses tér csökken le az $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ -es tényezővel (feltételeztük, hogy a mágneses tér transzverzális). Mindaddig, amíg v sokkal kisebb c -nél, a mágneses tér megváltozását figyelmen kívül hagyhatjuk, a jelenség lényege az, hogy elektromos tér jelenik meg. Az ilyen effektusok példaként elevenítsük fel azt a valaha híres problémát, amely a repülőgép sebességének meghatározásával kapcsolatos. A probléma persze ma már nem időszerű, hiszen napjainkban e célra a Földről visszavert radarhullámokat használják fel, hosszú ideig azonban nagy nehézséget jelentett a repülőgép sebességének meghatározása, főleg ha rossz volt az időjárás. Ekkor ugyanis nem lehetett látni a földfelszínt, s nem tudták megállapítani, milyen távolságra emelkedtek fel. Ennek ellenére igen fontos lett volna megtudni, mekkora a gép sebessége a földfelszínhez képest. Hogyan lehetne ezt meghatározni anélkül, hogy a felszínt látnánk? Akik ismerték a transzformációs képleteket, megfelelő módszert találtak ki annak a figyelembevételével, hogy a repülőgép a Föld mágneses terében mozog. Mozogjon ugyanis egy repülőgép valamely többé-kevésbé ismert mágneses térben. Vegyük azt az egyszerű esetet, amikor a mágneses tér függőleges irányú. Ha ezen vízszintes irányú v sebességgel haladunk keresztül, képlettünk szerint elektromos teret kell észleljünk, amely $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ -vel egyenlő, tehát mozgásunkra merőleges irányú. Amennyiben a repülőgépben kiveszítünk

egy szigetelt vezetékdarabkát, az említett elektromos tér töltéseket hoz létre a vezetékdarab két végén. Ebben semmi új nincs. A földi megfigyelő szempontjából mágneses téren haladunk keresztül, és a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ erőhatás folytán a töltések a vezetékdarabka vége felé áramlanak. A transzformációs egyenletek ugyanezt a jelenséget írják le más módon. (Az, hogy valami többféleképpen írható le, még nem jelenti azt, hogy az egyik leírás mód jobb, mint a másik. Mi már olyan sok fajta módszerrel és leírás móddal ismerkedtünk meg, hogy ugyanazt az eredményt rendszerint „hetvenhét-féleképpen” is megkaphatjuk.)

v meghatározásához nem kell tehát mást tennünk, mint potenciálkülönbséget mérni a vezeték két vége között. A problémát azonban mégsem oldhatjuk meg egy voltmérővel, mert ugyanaz a tér hat a voltmérő vezetékére is. Mindezek ellenére módunkban áll hasonló terek megmérése. Néhány idevágó módszert a 61. fejezetben ismertettünk a légköri elektromos jelenségekkel kapcsolatban. Lehetőség van tehát a repülőgép sebességének meghatározására.

Ezt a fontos problémát azonban sohasem oldották meg ezen az úton, mert az effektus nyomán létrejött elektromos tér értéke csak néhány mV/m nagyságrendű. Igaz ugyan, hogy lehetőség van ilyen csekély elektromos terek mérésére is, nehézséget okoz azonban az, hogy ezeket a tereket sajnos igen nehéz megkülönböztetni a más eredetűektől. Miközben mágneses téren haladunk keresztül, a keletkező elektromos teret nem lehet megkülönböztetni attól, mely már amúgy is a levegőben volt, például ami a levegő vagy a felhők elektrosztatikus töltéseitől ered. A 61. fejezetben már említettük, hogy a földfelszín felett 100 V/m nagyságrendű elektromos terek észlelhetők. Ezek azonban elég rendszertelenek. Így amikor a repülőgép a levegőrétegek között mozog, ki van téve a légköri elektromos tér fluktuációinak, amelyek a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ tag által létrehozott parányi térhez képest óriásiak. Végül is tehát gyakorlati nehézségek tették lehetetlenné, hogy a repülőgép sebességét a Föld mágneses terének felhasználásával határozzák meg.

78.4. A mozgásegyenletek relativisztikus jelölésmódban¹

Nem lett volna sok értelme annak, hogy a Maxwell-egyenletekből bogozzuk ki a térerősségeket, ha nem vizsgálnánk meg ugyanakkor, hogy a térerősségek ismeretéből milyen előnyök származnak. Talán emlékeznek még, hogy a töltésekre ható erő megállapításához a térerősségekre van szükségünk, a töltések mozgását pedig az erők határozzák meg. Az elektrodi-

¹Ebben a szakaszban visszaírtunk minden c -t a helyére.

namika egyik fejezete ezért természetesen a töltések mozgása és az erők közötti kapcsolattal foglalkozik.

Az \mathbf{E} és \mathbf{B} terekben egyetlen mozgó töltésre az

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (78.23)$$

erő hat. Kis sebességek esetén ez az erő megadja a gyorsulás és a tömeg szorzatát; tetszőleges sebességek esetén pedig ez az erő $d\mathbf{p}/dt$ -vel egyenlő. A $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ összefüggés felhasználásával megkapjuk a relativisztikusan helyes mozgásegyenletet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (78.24)$$

Vizsgáljuk meg egy kicsit a (78.24) egyenletet a relativitáselmélet szempontjából. Mivel a Maxwell-egyenleteket már relativisztikus formára hoztuk, érdekes lenne azt is megvizsgálni, hogyan néz majd ki a mozgásegyenlet relativisztikusan invariáns formában. Próbáljuk meg, hátha fel tudjuk írni egyenletünket négyesvektor-jelölésmódban.

Tudjuk, hogy az impulzus a p_μ négyesvektor egyik része, amelynek időkomponensét az $m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ energia c -vel osztva adja. Azt lehetne tehát gondolni, hogy a (78.24) bal oldalát dp_μ/dt -vel kell helyettesítenünk. Ekkor már csak az \mathbf{F} -hez tartozó negyedik komponenst kell megtalálnunk. Ennek egyenlőnek kell lennie az energia időegység alatti megváltozásával, vagy az időegység alatt végzett munkával: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ -vel. A (78.24) jobb oldalára négyesvektorként tehát az $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c, F_x, F_y, F_z)$ mennyiséget szeretnénk írni. Ez utóbbi azonban nem alkot négyesvektort.

Valamely négyesvektor *idő szerinti* differenciálhányadosa már nem négyesvektor, mivel a d/dt operáció megköveteli a t mérésre alkalmas valamely koordináta-rendszer felvételét. Ugyanezzel a nehézséggel találkozunk akkor is, amikor v -t akartuk négyesvektorra kiegészíteni. Első próbálkozásként $cdt/dt = c$ -t írtunk időkomponensként. A

$$\left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (c, \mathbf{v}) \quad (78.25)$$

mennyiségek azonban *nem* alkotnak négyesvektort. Rájöttünk viszont, hogy ha minden komponenst megszorozunk $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ -tel, máris más a helyzet; az

$$u_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (78.26)$$

„négyessebesség” már valóban négyesvektor. Egy mesterfogással a deriváltvektorból négyesvektort „gyárthatunk”; a d/dt -t megszorozzuk még $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ -tel.